풀이

STEP III 2004, 문제 5

순수수학 • 삼각방정식

> **STEP III 2004, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q5

핵심 아이디어

두 코사인 값이 같을 필요충분조건은 두 각이 부호와 2π의 정수배 차이를 빼고 일치하는 것이다. 탄젠트로 넘어가면 θ와 $\theta+\pi$를 구별하는 정보가 사라지므로 함의는 한 방향으로만 성립하며, 이것이 바로 반례(counterexample)의 요점이다. 소문항 (i)과 (ii)에서는 $a\cos x + b\sin x$를 $R\cos(x-\alpha)$ 꼴로 바꾸고, 첫 번째 결과를 이용해 $\tan x$를 $\tan\omega$로 나타낸 다음, 각의 크기를 이용해 올바른 사분면(quadrant)을 고른다.

풀이

첫 번째 결과

$\cos(x-\alpha)=\cos\beta$이면, 코사인은 우함수이고 주기(period)가 2π이므로 어떤 정수 n에 대하여 $x-\alpha=\pm\beta+2n\pi$이다. 따라서

$$x=\alpha+\beta+2n\pi \quad \text{또는} \quad x=\alpha-\beta+2n\pi.$$

tan의 주기는 π이고, 따라서 당연히 2π도 주기이므로, (이 탄젠트 값들이 정의되는 한) $\tan x=\tan(\alpha+\beta)$ 또는 $\tan x=\tan(\alpha-\beta)$를 얻는다.

역(converse)이 성립하지 않는 것은 tan의 주기는 π이지만 cos는 그렇지 않기 때문이다. $\alpha=\beta=0$, $x=\pi$로 잡자. 그러면 $\tan x=0=\tan(\alpha+\beta)$이지만

$$\cos(x-\alpha)=\cos\pi=-1\neq 1=\cos\beta.$$

일반적으로 $x=\alpha+\beta+\pi$이면 $\cos(x-\alpha)=-\cos\beta$이다.

ω에 관한 두 가지 사실이 유용하다. $\tan\omega=\frac{4}{3}$이므로 $\cos\omega=\frac{3}{5}$, $\sin\omega=\frac{4}{5}$이다. 또 $\frac{4}{3}>1$이므로 $\frac{\pi}{4}<\omega<\frac{\pi}{2}$이다.

소문항 (i)

여기서 $\sqrt{1^2+7^2} = 5\sqrt{2}$이므로 양변을 $5\sqrt{2}$로 나눈다.

$$\tfrac{1}{5\sqrt{2}}\cos x - \tfrac{7}{5\sqrt{2}}\sin x = \tfrac{1}{\sqrt{2}}.$$

$\cos\varphi = \frac{1}{5\sqrt{2}}$, $\sin\varphi = \frac{7}{5\sqrt{2}}$인 예각을 φ라 하면 $\tan\varphi = 7$이다. 방정식은

$$\cos(x+\varphi) = \cos\tfrac{\pi}{4},$$

이 되고, 이는 $\alpha = -\varphi$, $\beta = \frac{\pi}{4}$일 때의 첫 번째 결과이다. $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$를 이용하면

$$\tan(\alpha+\beta) = \tan(\tfrac{\pi}{4} - \varphi) = \frac{1-7}{1+7} = -\frac{3}{4},$$
$$\tan(\alpha-\beta) = -\tan(\varphi + \tfrac{\pi}{4}) = -\frac{7+1}{1-7} = \frac{4}{3}.$$

생각해 보기 이 탄젠트 값 각각에 대응하는 각은 $[0, 2\pi]$에 두 개씩 있지만, 방정식의 해는 이 구간에 두 개뿐이다. 어느 두 개인가?

반례에서 보았듯이 탄젠트만으로는 이를 결정할 수 없으므로, $x = \alpha \pm \beta + 2n\pi$로 돌아가 $\alpha \pm \beta$가 실제로 어디에 있는지 알아낸다. $\tan\varphi = 7 > 1$이므로 $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2}$이다.

- $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4} - \varphi$는 $(-\frac{\pi}{4}, 0)$에 있고 탄젠트 값이 $-\frac{3}{4}$이다. 한편 $\tan(\frac{\pi}{2} - \omega) = \cot\omega = \frac{3}{4}$이고 $\frac{\pi}{2} - \omega \in (0, \frac{\pi}{4})$이다. 따라서 $\alpha + \beta = \omega - \frac{\pi}{2}$이고, 2π를 더하면 $x = \frac{3\pi}{2} + \omega$를 얻는다.
- $\alpha - \beta = -\varphi - \frac{\pi}{4}$는 $(-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2})$에 있고 탄젠트 값이 $\frac{4}{3}$이다. 각 $\omega - \pi$도 이 구간에 있고 탄젠트 값이 $\frac{4}{3}$이다. 탄젠트는 점근선(asymptote)을 피하는 길이가 π보다 짧은 구간에서 일대일(one-to-one)이므로 $\alpha - \beta = \omega - \pi$이다. 2π를 더하면 $x = \pi + \omega$를 얻는다.

$0 < \omega < \frac{\pi}{2}$이므로 두 값 모두 $[0, 2\pi]$에 있고, 다른 n을 택하면 이 범위의 값이 나오지 않는다. 그러므로

$$x = \pi + \omega \quad \text{또는} \quad x = \tfrac{3\pi}{2} + \omega.$$

확인해 보면, $x = \pi + \omega$일 때 $\cos x - 7\sin x = -\frac{3}{5} + \frac{28}{5} = 5$이고, $x = \frac{3\pi}{2} + \omega$일 때는 $\cos x = \sin\omega$, $\sin x = -\cos\omega$이므로 $\frac{4}{5} + \frac{21}{5} = 5$를 얻는다.

소문항 (ii)

여기서 $\sqrt{2^2+11^2} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$이므로

$$\tfrac{2}{5\sqrt{5}}\cos x + \tfrac{11}{5\sqrt{5}}\sin x = \tfrac{2}{\sqrt{5}}.$$

$\cos\alpha = \frac{2}{5\sqrt{5}}$, $\sin\alpha = \frac{11}{5\sqrt{5}}$인 예각을 α라 하면 $\tan\alpha = \frac{11}{2}$이다. $\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$인 예각을 β라 하면 $\sin\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\tan\beta = \frac{1}{2}$이다. 방정식은 $\cos(x-\alpha) = \cos\beta$이고

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\frac{11}{2}-\frac{1}{2}}{1+\frac{11}{4}} = \frac{5}{15/4} = \frac{4}{3},$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\frac{11}{2}+\frac{1}{2}}{1-\frac{11}{4}} = \frac{6}{-7/4} = -\frac{24}{7}.$$

두 번째 값은 $\tan 2\omega$이다. 왜냐하면

$$\tan 2\omega = \frac{2\cdot\frac{4}{3}}{1-\frac{16}{9}} = \frac{8/3}{-7/9} = -\frac{24}{7}.$$

다시 각의 위치를 정한다. α와 β가 모두 예각이므로

- $\alpha-\beta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$이고 탄젠트 값이 $\frac{4}{3}$이므로 $\alpha-\beta = \omega$이다.
- $\alpha+\beta \in (0,\pi)$이고 탄젠트 값이 음수이므로 $(\frac{\pi}{2},\pi)$에 있다. $\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{2}$이므로 각 2ω도 $(\frac{\pi}{2},\pi)$에 있고 탄젠트 값이 같으므로 $\alpha+\beta = 2\omega$이다.

ω와 2ω는 모두 $[0,2\pi]$에 있고, $\pm 2\pi$를 더하면 이 구간을 벗어난다. 따라서 해는

$$x = \omega \quad \text{그리고} \quad x = 2\omega,$$

이고, 문제에서 요구한 대로 한 해가 다른 해의 두 배이다. 직접 확인해 보면 $x=\omega$일 때 $\frac{6}{5}+\frac{44}{5} = 10$이다. $x = 2\omega$일 때는 $\cos 2\omega = \frac{9-16}{25} = -\frac{7}{25}$, $\sin 2\omega = \frac{24}{25}$이므로 $-\frac{14}{25}+\frac{264}{25} = 10$을 얻는다.

검산

- $5 < 5\sqrt{2}$이고 $10 < 5\sqrt{5}$이어서 우변이 $-R$과 R 사이에 (등호 없이) 있으므로, 각 방정식은 $[0,2\pi]$에서 정확히 두 근을 가져야 한다.
- 수치적으로 $\omega \approx 0.9273$이다. 부호 변화를 이용한 탐색으로 (i)의 근 4.0689와 5.6397을 찾을 수 있는데, 이는 $\pi+\omega$와 $\frac{3\pi}{2}+\omega$이다. (ii)에서는 0.9273과 1.8546을 찾게 되며, 이는 ω와 2ω이다.

흔한 실수

- $\tan x = \frac{4}{3}$ 또는 $\tan x = -\frac{3}{4}$를 풀어 $[0,2\pi]$의 네 각을 모두 답으로 적는 것. 그중 두 개는 가짜 해이며, 그 이유는 정확히 반례가 보여 준 것과 같다.
- (i)에서 φ의 부호를 잘못 잡는 것. 예를 들어 $\cos x - 7\sin x$를 $\cos(x+\varphi)$ 대신 $\cos(x-\varphi)$로 쓰는 경우이다.

STEP 너머

여기서의 어려움은 tan가 단사(injective)가 아니어서 "$\tan x = \tan y$"로부터는 x를 π를 법으로 하여서만 알 수 있다는 점이다. 복소해석학(complex analysis)에서는 편각(argument)과 $\log z$의 분지(branch)를 정의할 때 같은 문제가 나타나는데, 거기서도 각은 2π의 정수배 차이를 빼고서만 정해진다. 이 관점에서 보면 $a\cos x + b\sin x = \mathrm{Re}\left((a - \mathrm{i}b)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)$이고, R와 α는 그저 $a + \mathrm{i}b$의 절댓값(modulus)과 편각일 뿐이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.