풀이

STEP III 2004, 문제 4

순수수학 • 접하는 원과 급수

STEP III 2004, 4번 문제

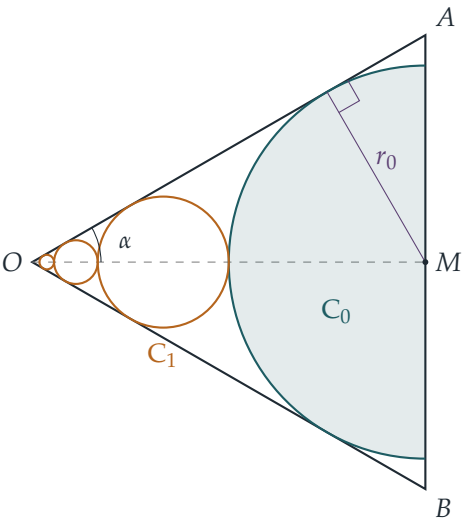
더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s3-q4

핵심 아이디어

OA와 OB에 모두 접하는 원은 어느 것이든 그 중심이 각 AOB의 이등분선(angle bisector) 위에 있고, O에서 중심까지의 거리는 반지름에 의해 정해진다. O에서의 각이 α인 직각삼각형을 생각하면 거리 $= r/\sin\alpha$이다. "두 원이 접한다"는 조건을 이 거리들에 대한 방정식으로 쓰면 연속한 두 반지름 사이의 관계가 나오고, 반지름들은 등비수열(geometric progression)을 이룬다. 그러면 넓이들은 등비급수(geometric series)를 이루며, 마지막 부분은 한 변수 함수의 최대화 문제(또는 α 값을 잘 고르는 문제)가 된다.

풀이



반지름의 비

AB의 중점을 M이라 하자. $OA = OB$이므로 직선 OM은 각 AOB를 이등분하고 AB에 수직이다. 각 AOM과 각 BOM은 모두 α이다.

두 직선 OA와 OB에 모두 접하는 반지름 r인 원을 아무것이나 하나 잡자. 이 원의 중심은 두 직선에서 같은 거리에 있으므로 이등분선 OM 위에 있다. 중심을 P라 하고 원이 OA에 접하는 점을 T라 하면 $PT \perp OA$, $PT = r$이고 각 $POT = \alpha$이므로, 직각삼각형 OTP에서

$$OP = \frac{r}{\sin\alpha}.$$

이 사실은 C_0(중심 M)과 모든 C_n에 적용된다. O에서 C_n의 중심까지의 거리를 $d_n = r_n / \sin\alpha$로 나타내자.

원 C_{n+1}은 C_n과 O 사이의 구석에 놓인다(이 원은 변 OA와 OB의 연장선이 아니라 변 자체에 접하므로, 각의 내부에서 C_n의 O 쪽에 있어야 한다). 외접(touching externally)하는 두 원의 중심 사이의 거리는 $r_n + r_{n+1}$이고, 여기서는 두 중심이 모두 OM 위에 있으므로

$$d_n - d_{n+1} = r_n + r_{n+1}.$$

$d_n = r_n / \sin\alpha$를 대입하고 $\sin\alpha$를 곱하면

$$r_n - r_{n+1} = (r_n + r_{n+1})\sin\alpha$$
$$r_n(1 - \sin\alpha) = r_{n+1}(1 + \sin\alpha),$$

이고, 따라서

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = \frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}$$

이므로 증명이 끝난다. 이 관계는 $n = 0$일 때도 성립한다. C_1은 반원(semicircle)의 곡선 부분, 즉 C_0에서 O를 향한 절반에 접하기 때문이다.

전체 넓이

$k = \dfrac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}$라 하자. $0 < \sin\alpha < 1$이므로 $0 < k < 1$이고, $r_n = k^n r_0$이다. 반원의 넓이는 $\frac{1}{2}\pi r_0^2$이고 C_n의 넓이는 $\pi k^{2n} r_0^2$이다. 급수 $\sum_{n\geq 1} k^{2n}$은 공비가 $k^2 < 1$인 등비급수이므로 $k^2/(1 - k^2)$로 수렴(converge)한다. 따라서

$$S = \pi r_0^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{k^2}{1 - k^2}\right).$$

그런데

$$1 - k^2 = \frac{(1 + \sin\alpha)^2 - (1 - \sin\alpha)^2}{(1 + \sin\alpha)^2} = \frac{4\sin\alpha}{(1 + \sin\alpha)^2}, \qquad \text{이므로} \qquad \frac{k^2}{1 - k^2} = \frac{(1 - \sin\alpha)^2}{4\sin\alpha}.$$

그러므로

$$S = \pi r_0^2 \frac{2\sin\alpha + 1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha}{4\sin\alpha} = \frac{1+\sin^2\alpha}{4\sin\alpha}\pi r_0^2,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

삼각형과 비교하기

첫 부분에서 $OM = d_0 = r_0/\sin\alpha$이다. 직각삼각형 OMA에서 $AM = OM\tan\alpha$이므로, 삼각형 OAB의 넓이는

$$T = OM \cdot AM = OM^2\tan\alpha = \frac{r_0^2}{\sin^2\alpha}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{r_0^2}{\sin\alpha\cos\alpha}.$$

(반원은 실제로 밑변 위에 들어간다. $r_0 = OM\sin\alpha < OM\tan\alpha = AM$이기 때문이다.) 나누면

$$\frac{S}{T} = \frac{\pi}{4}(1+\sin^2\alpha)\cos\alpha.$$

? **생각해 보기** 어떤 α 값을 시도해 보아야 할까?

$\alpha \to 0$일 때 이 비는 $\pi/4 \approx 0.785$로 다가가는데, 이는 0.8에 조금 못 미치므로 아주 가느다란 삼각형으로는 안 된다. 자연스러운 첫 시도는 O에서의 각을 직각으로, 즉 $\alpha = \pi/4$로 잡는 것이다. 그러면 $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}$이고 $\cos\alpha = 1/\sqrt{2}$이므로

$$\frac{S}{T} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{8\sqrt{2}}.$$

이 값이 $\frac{4}{5}$보다 클 필요충분조건은 $15\pi > 32\sqrt{2}$이다. 양변이 모두 양수이므로 제곱해도 되며, 조건은 $225\pi^2 > 2048$, 즉 $\pi^2 > 9.102\ldots$가 된다. $\pi > 3.1$이므로 $\pi^2 > 9.61$이고, 따라서 부등식이 성립한다. 그러므로 $\alpha = \pi/4$일 때(그리고 연속성(continuity)에 의해 $\pi/4$에 가까운 모든 α에 대해서도) 원들은 삼각형의 5분의 4보다 많은 부분을 덮는다.

덧붙여 두면, 가장 좋은 α는 $c = \cos\alpha$로 두고 $f(c) = (2-c^2)c$를 최대화하여 얻는다. $f'(c) = 2 - 3c^2 = 0$에서 $\cos\alpha = \sqrt{2/3}$, 곧 $\sin\alpha = 1/\sqrt{3}$이고, 최대 비율은 $\pi\sqrt{6}/9 \approx 0.855$이다.

검산

- $\alpha \to \pi/2$이면 삼각형이 납작해지고 $k \to 0$이다. 원 C_n들은 사라지고 $S \to \frac{1}{2}\pi r_0^2$가 되어 $\frac{1+1}{4}\pi r_0^2$와 일치한다.
- $\alpha = \pi/6$이면 $k = \frac{1}{3}$이고 $S = \pi r_0^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1/9}{8/9}\right) = \frac{5}{8}\pi r_0^2$이다. 공식으로 계산하면 $\frac{1+1/4}{2}\pi r_0^2 = \frac{5}{8}\pi r_0^2$이다.

- 수치적으로, 임의의 α에 대해 직접 접하는 조건으로 원 3000개를 만들어 보면 두 공식이 약 10^{-15}의 오차로 재현되며, $\alpha = \pi/4$에서의 비는 0.8330이다.

흔한 실수

- C_0을 온전한 원으로 세는 것. 이것은 반원이며, 그래서 $\frac{1}{2}$가 나타난다.
- $d_n + d_{n+1} = r_n + r_{n+1}$이나 $d_n - d_{n+1} = r_n - r_{n+1}$을 쓰는 것. 원들은 외접하고, 두 중심은 O의 같은 쪽에 있다.
- 마지막 부분에서 작은 α를 시도하는 것. 그 경우 비는 $\pi/4 < \frac{4}{5}$로 다가간다.

STEP 너머

이 원들의 사슬은 O를 중심으로 하고 닮음비가 k인 하나의 닮음변환(dilation, enlargement)으로 만들어진다. 이 변환은 구석 영역을 자기 자신으로 보내고 각 원을 다음 원으로 보낸다. 이와 같은 자기닮음 배치는 프랙탈(fractal), 그리고 아폴로니우스 원 채우기(Apollonian circle packing)로 이어지는데, 여기서 서로 접하는 원들의 곡률(curvature)은 데카르트(Descartes)의 원 정리를 따른다. 원을 직선으로 바꾸는 변환인 반전(inversion)을 쓰면 이런 접촉 문제의 상당수가 쉬워진다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)가 이를 아름답게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.