풀이

# STEP III 2004, 문제 3

순수수학 • 볼록성과 급수의 한계

**STEP III 2004, 3번 문제**

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s3-q3

## 핵심 아이디어

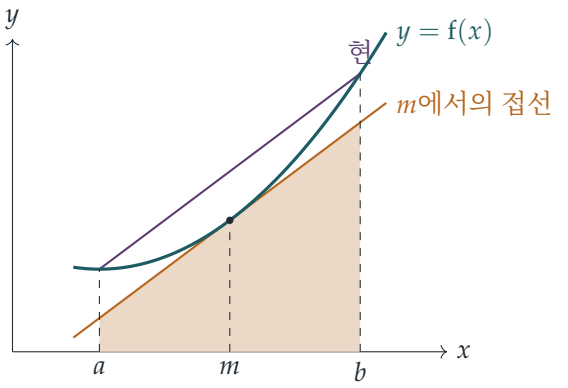
$\mathrm{f}'' > 0$이면 곡선은 위로 휘어진다. 따라서 곡선은 모든 접선(tangent line)보다 위에 있고, 모든 현(chord)보다 아래에 있다. 중점에서의 접선과 양 끝을 잇는 현은 각각 넓이를 쉽게 쓸 수 있는 사다리꼴(trapezium)을 만들고, 이 두 넓이가 적분값을 위아래에서 가둔다. 구간 $[n-1, n]$에서 $\mathrm{f}(x) = 1/x^2$로 두면 적분이 연쇄적으로 소거되는(telescoping) 꼴이 된다. 이 부등식들을 $n$에 대하여 더하면 $\sum 1/n^2$의 범위를 얻는다.

## 풀이

### 적분에 대한 두 부등식

$m = \frac{1}{2}(a+b)$라 하자. $[a, b]$에서 $\mathrm{f}'' > 0$이므로 기울기 $\mathrm{f}'$은 순증가(strictly increasing)하고, 따라서 곡선은 볼록(convex)하다. 이로부터 두 가지 사실을 얻는다.

- **곡선은 $m$에서의 접선보다 위에 있다.** $t(x) = \mathrm{f}(m) + \mathrm{f}'(m)(x-m)$, $g = \mathrm{f} - t$라 하자. 그러면 $g(m) = g'(m) = 0$이고 $g'' = \mathrm{f}'' > 0$이므로 $g'$은 증가한다. 따라서 $m$의 왼쪽에서 $g' < 0$, 오른쪽에서 $g' > 0$이므로 $g$는 $m$에서 엄격한 최솟값 0을 가지며, $x \neq m$일 때 $\mathrm{f}(x) > t(x)$이다.
- **곡선은 현보다 아래에 있다.** $(a, \mathrm{f}(a))$와 $(b, \mathrm{f}(b))$를 지나는 직선을 $c(x)$, $h = \mathrm{f} - c$라 하자. 그러면 $h(a) = h(b) = 0$이고 $h'' > 0$이다. 만약 $h$가 $(a, b)$ 안에서 $\geq 0$인 값을 가진다면, $h$는 그 안에서 최댓값을 가지고 그곳에서 $h'' \leq 0$이어야 하는데, 이는 불가능하다. 따라서 $a < x < b$일 때 $\mathrm{f}(x) < c(x)$이다.




이제 $[a,b]$에서 넓이를 비교하자. 접선 아래의 넓이는 폭이 $b-a$인 사다리꼴이다. 그 평균 높이는 중점에서의 $t$의 높이 $t(m)=\mathrm{f}(m)$이므로, 넓이는 $(b-a)\,\mathrm{f}(m)$이다(색칠한 부분). 현 아래의 넓이는 평행한 두 변이 $\mathrm{f}(a)$와 $\mathrm{f}(b)$인 사다리꼴이므로, 넓이는 $(b-a)\frac{1}{2}\big(\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(b)\big)$이다. 곡선은 고립된 점들을 제외하면 두 직선 사이에 엄격하게 놓여 있다. 따라서

$$(b-a)\,\mathrm{f}\Big(\frac{a+b}{2}\Big) < \int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x < (b-a)\,\frac{\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(b)}{2}.$$

(그림은 f가 양수인 경우를 보여 준다. 그러나 논증의 본질은 $\int(\mathrm{f}-t)>0$과 $\int(c-\mathrm{f})>0$이므로, f의 부호는 상관없다.)

### $a$, $b$, f 정하기

가운데 항 $\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$은 $\big[-\frac{1}{x}\big]_{n-1}^{n}$처럼 보이므로 $\mathrm{f}(x)=1/x^2$, $a=n-1$, $b=n$으로 잡는다. 그러면 $b-a=1$이고, $n-1\geq 1>0$이므로 $[n-1,n]$에서 $\mathrm{f}''(x)=6/x^4>0$이다. 또한

$$\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n},\qquad \mathrm{f}\Big(\frac{2n-1}{2}\Big)=\frac{4}{(2n-1)^2},$$

이므로 앞부분의 결과로부터

$$\frac{4}{(2n-1)^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}<\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n-1)^2}\Big)\qquad (n\geq 2),$$

를 얻고, 이것이 요구된 결과이다.

### 1에 대한 두 부등식 이끌어 내기

$S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$이라 하자. $n\geq 2$일 때 $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$이고 이 항들은 연쇄적으로 소거되므로, 이 급수(series)는 수렴(converge)한다. $n=2,3,\ldots,N$에 대한 부등식들을 모두 더한다. 가운데 항들은 소거되어 $1-\frac{1}{N}$이 되고, 이는 1로 수렴한다.

**생각해 보기** $N \to \infty$로 보내면 엄격한 부등식은 보통 $\le$가 된다. 어떻게 하면 엄격한 부등식을 유지할 수 있을까?

차이를 살펴보자. 각 $n \ge 2$에 대하여 차이 $d_n = \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) - \frac{4}{(2n-1)^2}$은 양수이다. 따라서 차이들의 무한합은 적어도 첫째 항 $d_2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18} > 0$ 이상이다. 여기 나오는 급수는 모두 수렴하므로 항별로 더할 수 있고, 두 합의 차는 엄격하게 양수이다. 오른쪽 부등식에도 같은 논증이 적용된다.

왼쪽에서 $n = 2, 3, 4, \ldots$ 일 때 $2n - 1 = 3, 5, 7, \ldots$ 이므로

$$4\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots\right) < 1.$$

오른쪽에서는

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n-1)^2}\right) = \frac{1}{2}(S-1) + \frac{1}{2}S = \frac{1}{2} + (S-1),$$

이므로

$$1 < \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots\right).$$

### 홀수 제곱과 비교하기

왼쪽 급수를 홀수 항 다음에 짝수 항이 오도록 연속된 두 항씩 묶는다. $k \ge 2$일 때 $2k > 2k - 1 > 0$이므로

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{(2k)^2}\right) < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(2k-1)^2} + \frac{1}{(2k-1)^2}\right) = \frac{1}{(2k-1)^2},$$

이다. $k = 2, 3, 4, \ldots$ 일 때 왼쪽의 쌍은 $(3^2, 4^2)$, $(5^2, 6^2), \ldots$ 이고, 이들을 모으면 $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \ldots$의 모든 항이 정확히 한 번씩 쓰인다. (모든 항이 양수이고 급수가 수렴하므로 이렇게 묶어도 된다.) 오른쪽은 $\frac{1}{3^2}, \frac{1}{5^2}, \ldots$ 이다. 앞에서처럼 엄격성을 유지하면서 $k$에 대하여 더하면

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots\right) < \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots.$$

### $S$의 범위

하한. 오른쪽 부등식에서 $1 < \frac{1}{2} + (S-1)$이므로 $S > \frac{3}{2}$이다.

상한. $T = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = S - 1 - \frac{1}{4}$라 하자. 마지막 비교와 왼쪽 부등식을 합치면

$$\frac{1}{2}T < \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots < \frac{1}{4},$$

이므로 $T < \frac{1}{2}$이다. 따라서 $S = 1 + \frac{1}{4} + T < \frac{7}{4}$이다. 종합하면

$$\frac{3}{2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{7}{4}.$$

## 검산

- 참값은 $S = \pi^2/6 \approx 1.6449$이고, 이는 $(1.5, 1.75)$ 안에 있다.
- 수치적으로 $4\sum_{k\geq 2}(2k-1)^{-2} = 4(\pi^2/8 - 1) \approx 0.935 < 1$이고, $\frac{1}{2} + (S-1) \approx 1.145 > 1$이다.
- 비교 부등식의 경우 $\frac{1}{2}T \approx 0.197 < 0.234 \approx \sum_{k\geq 2}(2k-1)^{-2}$이다.
- $n = 2$를 대입하면 $\frac{4}{9} \approx 0.444 < \frac{1}{2} < \frac{5}{8} = 0.625$이다. $2 \leq n \leq 2000$에 대하여 정확한 분수로 확인해 보면 세 부등식이 모두 성립한다.

## 흔한 실수

- 빠진 $\frac{1}{4}$를 잊는 것: 괄호는 $\frac{1}{3^2}$부터 시작하므로 $T = S - \frac{5}{4}$이고, $S - 1$이 아니다. $S - 1$을 쓰면 $S < \frac{3}{2}$라는 틀린 결론에 이른다.
- 부등식의 방향을 거꾸로 쓰는 것. 위로 휘어진 곡선에서는 접선(중점) 근삿값이 너무 작고, 현(사다리꼴) 근삿값이 너무 크다.
- 무한합으로 넘어가면서 "$<$"가 극한을 거쳐도 유지되는 이유를 말하지 않고 슬그머니 그대로 두는 것.

## STEP 너머

두 부등식은 중점 공식(midpoint rule)과 사다리꼴 공식(trapezium rule)이다. 볼록성은 각 공식이 어느 방향으로 오차를 내는지 알려 주고, 테일러 정리(Taylor's theorem)는 두 오차 모두 $(b-a)^3$처럼 줄어든다는 것을 보여 준다. 정확한 값 $\sum 1/n^2 = \pi^2/6$은 바젤 문제(Basel problem)에 대한 오일러(Euler)의 해답이다. 대학의 첫 해석학(analysis) 강의에서는 이를 푸리에 급수(Fourier series)로 증명한다. 또한 그 강의에서는 "극한에서의 엄격한 부등식" 단계도 엄밀하게 다룬다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학의 이해)는 급수의 수렴과 볼록함수를 모두 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.