풀이

STEP III 2004, 문제 2

순수수학 • 점근선과 곡선의 개형

> **STEP III 2004, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q2

핵심 아이디어

$f(x)$를 직선 $y = x - 4$에 보정항을 더한 꼴로 쓴다. 보정항의 분자는 완전제곱식(perfect square)이므로 한 점에서 **두 번** 0이 되고, 바로 이 중근이 접한다(tangency)는 것의 의미이다. $f(x) = 0$의 근을 구할 때는 분모를 없앤다. 그러면 두 제곱의 차(difference of two squares)가 나오고, 이것은 곧바로 인수분해된다.

풀이

풀이 전체에서 다음과 같이 쓴다.

$$f(x) = (x-4) - \frac{16(2x+1)^2}{x^2(x-4)}.$$

소문항 (i)

분모는 $x = 0$과 $x = 4$에서 0이 된다. 분자 $16(2x+1)^2$은 두 점 모두에서 0이 아니므로, 수직 점근선(vertical asymptote)은 다음과 같다.

$$x = 0 \qquad \text{그리고} \qquad x = 4.$$

$|x|$가 클 때 이 분수는 분자가 이차식이고 분모가 삼차식이다.

$$\frac{16(2x+1)^2}{x^2(x-4)} = \frac{64x^2+64x+16}{x^3-4x^2} \approx \frac{64}{x} \to 0 \quad \text{극한} x \to \pm\infty,$$

따라서 $f(x) - (x-4) \to 0$이고, 사선 점근선(oblique asymptote)은 다음과 같다.

$$y = x - 4.$$

? 생각해 보기 점근선이 어떻게 접선이 될 수도 있을까?

점근선(asymptote)은 멀리 떨어진 곳에서 일어나는 일만 설명하므로, 그 직선이 어떤 유한한 점에서 곡선에 접하는 것을 막는 것은 없다. 직선과 곡선이 만나는 곳을 찾기 위해 $\mathrm{f}(x) = x - 4$로 놓는다.

$$\mathrm{f}(x) - (x-4) = -\frac{16(2x+1)^2}{x^2(x-4)} = 0 \iff x = -\tfrac{1}{2}.$$

인수 $(2x+1)$이 제곱되어 있으므로 $x = -\frac{1}{2}$는 $\mathrm{f}(x) - (x-4) = 0$의 **중근**(double root)이다. 이는 직선이 그 점에서 곡선에 접한다는 뜻이다. 직접 확인하기 위해 $h(x) = -16/(x^2(x-4))$로 두고 $D(x) = \mathrm{f}(x) - (x-4) = (2x+1)^2 h(x)$라 하자. 함수 h는 $x = -\frac{1}{2}$ 근처에서 미분가능(differentiable)하므로

$$D'(x) = 4(2x+1)h(x) + (2x+1)^2 h'(x),$$

이고, 이 값은 $x = -\frac{1}{2}$에서 0이다. 따라서 $\mathrm{f}'(-\frac{1}{2}) = 1$이며, 이는 점근선의 기울기와 같다. 또한 $\mathrm{f}(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{2}$이므로 이 점은 $y = x - 4$ 위에 있다. 그러므로 사선 점근선은 점 $(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2})$에서 곡선의 접선(tangent)이다.

소문항 (ii)

모든 항을 공통분모 $x^2(x-4)$로 통분한다.

$$\mathrm{f}(x) = \frac{x^2(x-4)^2 - 16(2x+1)^2}{x^2(x-4)} = \frac{[x(x-4)]^2 - [4(2x+1)]^2}{x^2(x-4)}.$$

분자는 두 제곱의 차이다.

$$\begin{aligned}[x^2 - 4x - 4(2x+1)][x^2 - 4x + 4(2x+1)] &= (x^2 - 12x - 4)(x^2 + 4x + 4) \\ &= (x^2 - 12x - 4)(x+2)^2.\end{aligned}$$

따라서

$$\mathrm{f}(x) = \frac{(x+2)^2(x^2 - 12x - 4)}{x^2(x-4)}.$$

인수 $(x+2)^2$로부터 $x = -2$가 $\mathrm{f}(x) = 0$의 중근임을 알 수 있고, 요구된 대로 $x = -2$는 분모의 영점이 아니다. 나머지 두 근은 $x^2 - 12x - 4 = 0$에서 나온다.

$$x = 6 \pm 2\sqrt{10} \approx 12.32,\ -0.32.$$

소문항 (iii)

그래프 개형을 그리는 데 필요한 특징들을 모아 보자.

$x = 0$ 근처. $x \to 0$일 때 $f(x) \approx -\dfrac{16}{x^2 \cdot (-4)} = \dfrac{4}{x^2}$이므로, **양쪽** 모두에서 $f(x) \to +\infty$이다.

$x = 4$ 근처. $x \to 4$일 때 $f(x) \approx -\dfrac{16 \cdot 81}{16(x-4)} = -\dfrac{81}{x-4}$이다. 따라서 $x \to 4^-$일 때 $f(x) \to +\infty$이고, $x \to 4^+$일 때 $f(x) \to -\infty$이다.

사선 점근선의 어느 쪽에 있는가? $f(x) - (x-4) = -16(2x+1)^2/(x^2(x-4))$이다. 이 값은 $x < 4$에서($x = 0$과 $x = -\frac{1}{2}$는 제외) 양수이고, $x > 4$에서 음수이다. 따라서 곡선은 $x = 4$의 왼쪽에서는 $y = x - 4$보다 위에 있으면서 $x = -\frac{1}{2}$에서만 그 직선에 접하고, 오른쪽에서는 그 아래에 있다.

f의 부호. 인수분해된 꼴에서 인수 $(x+2)^2$과 x^2은 결코 음수가 아니다. 따라서 f의 부호는 $(x^2 - 12x - 4)/(x-4)$의 부호와 같다.

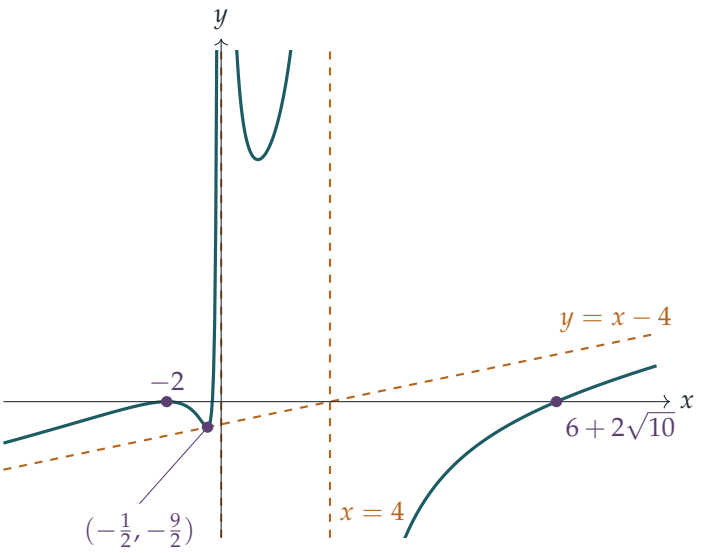
- $x < 6 - 2\sqrt{10}$일 때($f(-2) = 0$은 제외)와 $4 < x < 6 + 2\sqrt{10}$일 때 $f < 0$이다.
- $6 - 2\sqrt{10} < x < 4$일 때($x \neq 0$)와 $x > 6 + 2\sqrt{10}$일 때 $f > 0$이다.

곡선은 $x = -2$의 양쪽에서 음수이고 그 점에서 x축에 접하므로, $(-2, 0)$은 극댓점(local maximum)이다.

극점. 극점(turning point)은 STEP의 그래프 개형에는 필요 없지만, 그래프를 더 정확하게 만들어 준다. 미분하면 다음을 얻는다.

$$f'(x) = 1 + \frac{16(2x+1)(2x^2+3x-8)}{x^3(x-4)^2}.$$

$(-2, 6 - 2\sqrt{10})$에서 곡선은 높이 0에서 시작하여 높이 0에서 끝나고 그 사이에서는 음수이므로, 이 구간에 극솟점이 있다. 수치적으로 이 극솟점은 약 $(-0.51, -4.50)$으로, 접점의 바로 왼쪽에 있다. $(0, 4)$에서 곡선은 양 끝에서 $+\infty$로 가므로 여기에도 극솟점이 있으며, 그 위치는 약 $(1.35, 42.7)$이다. $f'(x) = 0$에서 분모를 없애면 $(x+2)(x^4 - 10x^3 + 100x^2 - 72x - 64) = 0$을 얻는다. 이 사차식(quartic)은 정확히 이 두 개의 실근을 가지므로 다른 극점은 없다. 특히 f는 $x > 4$ 전체에서 증가한다.



이 그래프는 축척에 맞게 그렸기 때문에 $x = -2$와 $x \approx -0.32$ 사이의 움푹 들어간 부분이 얕아 보인다. 그곳의 가장 낮은 점은 축보다 약 4.5만큼만 아래에 있고, 곡선은 $(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{2})$에서 점근선에 접한다.

검산

- $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{2} - 0 = -\frac{9}{2}$이고, 이는 $y = x - 4$ 위에 있다. $x = -\frac{1}{2}$에서 수치 미분을 하면 1.000이 나온다.
- $(x+2)^2(x^2 - 12x - 4)$를 전개하여 $x^2(x-4)^2 - 16(2x+1)^2$과 비교한다. 둘 다 $x^4 - 8x^3 - 48x^2 - 64x - 16$이다.
- $f(1000) - (1000 - 4) \approx -0.064 \approx -64/1000$으로, $64/x$ 어림이 예측한 대로이다.

흔한 실수

- x^2 때문에 $x = 0$ 근처에서 곡선이 **양쪽** 모두 $+\infty$로 간다는 것을 잊는다. 두 수직 점근선에서의 모습은 서로 다르다.
- 직선이 곡선과 만난다는 것만 보이고 접한다고 증명한다. 기울기가 같다는 것, 또는 이와 동치로 중근이라는 것도 보여야 한다.
- 소문항 (ii)에서 두 제곱의 차를 알아보지 못하고, 사차식인 분자를 전개한 뒤 그 근을 찾으려 한다.

STEP 너머

직선이 곡선과 "중근"으로 만나는 것은 정확히 그 직선이 접선일 때이다. 이것이 **교점의 중복도**(multiplicity of intersection)라는 개념으로, 대수기하학(algebraic geometry)의 기본이며 두 곡선이 몇 번 만나는지에 관한 베주(Bézout)의 정리 같은 결과로 이어진다. 유리함수(rational function)는 무한대에서 다항식 부분으로 근사되고, 나머지의 크기(여기서는 $64/x$)는 곡선이 점근선에 얼마나 빨리 다가가는지 알려 준다. 이것이 점근 전개(asymptotic expansion)의 첫 맛보기이다. Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*에 이런 형식의 그래프 개형 문제가 더 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.