풀이

STEP III 2004, 문제 11

역학 • 두 물체의 척력

> **STEP III 2004, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s3-q11

이 문제는 *Beyond STEP*의 10.6 절 **두 물체가 하나가 되다**에서 단계별 안내와 함께 자세히 다룬다: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/ch10/two-body.html

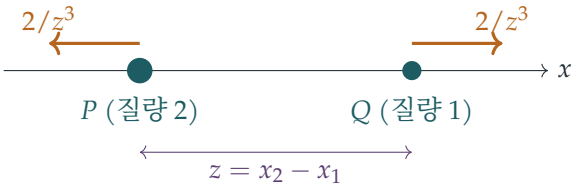
핵심 아이디어

서로를 밀어내는 두 입자로부터 두 개의 운동 방정식(equation of motion)을 얻고, 이 둘을 영리하게 조합한 두 식이 모든 일을 해낸다. **차** $x_2 - x_1$로부터 간격 z에 대한 하나의 방정식을 얻고, 이것은 $v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$ 기법으로 한 번 적분된다(사실 이것은 에너지 보존(energy conservation)이다). **가중합** $2x_1 + x_2$는 질량 중심(centre of mass)의 세 배이고, 힘이 모두 내력(internal force)이므로 이것에는 알짜힘이 전혀 작용하지 않는다.

풀이

z에 대한 방정식

P와 Q를 직선 위의 입자로 모형화하고, x는 P에서 Q 쪽으로 증가한다고 하자($x_2 > x_1$이므로). 척력은 P를 음의 방향으로, Q를 양의 방향으로 밀며, 그 크기는 각각 $2/z^3$이다.



각 입자에 뉴턴(Newton)의 제2법칙(second law)을 적용하면

$$2\ddot{x}_1 = -\frac{2}{z^3}, \qquad \ddot{x}_2 = \frac{2}{z^3}.$$

따라서 $\ddot{x}_1 = -1/z^3$이고, 빼면

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = \frac{2}{z^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{z^3},$$

이 되어 요구된 식을 얻는다.

z 구하기

먼저 초기 조건(initial condition)을 보자. $t = 0$일 때 $z = 1$이다. P는 Q 쪽으로, 즉 양의 방향으로 움직이므로 $\dot{x}_1 = 1$이고, $\dot{x}_2 = 0$이다. 따라서 $t = 0$에서 $v = \dot{z} = 0 - 1 = -1$이다. 즉 간격이 줄어들고 있다.

$\ddot{z} = v\,\mathrm{d}v/\mathrm{d}z$를 쓰면 방정식은

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} = \frac{3}{z^3} \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{1}{2}v^2 = -\frac{3}{2z^2} + C.$$

이 된다. $z = 1$에서 $v^2 = 1$이므로 $\frac{1}{2} = -\frac{3}{2} + C$이고 $C = 2$이다. 그러므로

$$v^2 = 4 - \frac{3}{z^2}, \qquad \text{또는} \qquad z^2\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 = 4z^2 - 3.$$

좌변은 $\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{d}(z^2)/\mathrm{d}t\right)^2$이므로, $u = \sqrt{4z^2 - 3} \geq 0$으로 놓아 볼 만하다. 그러면 $u^2 = 4z^2 - 3$이므로 $u\,\dot{u} = 4z\dot{z}$이고, 위 방정식은 $(z\dot{z})^2 = u^2$, 즉 $z\dot{z} = \pm u$임을 말해 준다. 따라서

$$\dot{u} = \frac{4z\dot{z}}{u} = \pm 4.$$

처음에 $u = 1$이고 $z\dot{z} = -1 < 0$이므로 음의 부호를 택한다. 즉 $u = 1 - 4t$이다.

> **생각해 보기** u가 0에 도달하면 어떤 일이 일어나는가? 그리고 $\dot{z}$의 부호는 계속 음으로 남는가?

그렇지 않다. $t = \frac{1}{4}$에서 $u = 0$이 되므로 $z = \sqrt{3}/2$이고 $v = 0$이다. 즉 두 입자가 순간적으로 가장 가까워진다. 이때 $\ddot{z} = 3/z^3 > 0$이므로 z가 증가하기 시작하고, $\dot{z}$가 양이 되어 양의 부호가 적용되며, $t \geq \frac{1}{4}$에 대하여 $u = 4t - 1$을 얻는다($t = \frac{1}{4}$에서 연속이다). 두 경우 모두 $u^2 = (4t-1)^2$이므로, 모든 $t \geq 0$에 대하여

$$4z^2 - 3 = 16t^2 - 8t + 1 \quad \Longrightarrow \quad z^2 = 4t^2 - 2t + 1,$$

이고, $z > 0$이므로

$$z = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}.$$

이것이 요구된 결과이다. ($4t^2 - 2t + 1 = 4(t - \frac{1}{4})^2 + \frac{3}{4} > 0$이므로 제곱근은 항상 정의된다는 점에 주의하라.)

x_1과 x_2 구하기

두 운동 방정식으로부터

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(2x_1 + x_2) = 2\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = -\frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^3} = 0.$$

이것은 운동량 보존(conservation of momentum)이다. 두 힘은 크기가 같고 방향이 반대이기 때문이다. 따라서 $2x_1 + x_2$는 t에 대한 일차식이다. $t = 0$에서 그 값은 $2 \cdot 0 + 1 = 1$이고, 변화율은 $2\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 2 \cdot 1 + 0 = 2$이다. 따라서

$$2x_1 + x_2 = 2t + 1, \qquad x_2 - x_1 = \sqrt{4t^2 - 2t + 1}.$$

첫째 식에서 둘째 식을 빼면 $3x_1$을 얻고, 첫째 식에 둘째 식의 두 배를 더하면 $3x_2$를 얻는다.

$$x_1 = \frac{2t + 1 - \sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{3}, \qquad x_2 = \frac{2t + 1 + 2\sqrt{4t^2 - 2t + 1}}{3}.$$

검산

- $t = 0$에서 이 식들은 $x_1 = 0$, $x_2 = 1$을 준다. 미분하면 $\dot{x}_1(0) = \frac{1}{3}\left(2 - \frac{1}{2} \cdot (-2)\right) = 1$이고 $\dot{x}_2(0) = \frac{1}{3}(2 - 2) = 0$이므로 조건과 맞는다.
- z를 더 빨리 구하는 방법: $w = z^2$으로 두면 $\ddot{w} = 2\dot{z}^2 + 2z\ddot{z} = 2\left(4 - 3/z^2\right) + 6/z^2 = 8$이므로, $w(0) = 1$과 $\dot{w}(0) = 2z\dot{z} = -2$로부터 $w = 4t^2 - 2t + 1$이다. 이 방법은 부호 걱정을 아예 피해 간다.
- $t \to \infty$일 때 $z \approx 2t - \frac{1}{2}$이므로 $x_1 \to \frac{1}{2}$이고 $\dot{x}_2 \to 2$이다. 즉 P는 결국 정지하고, Q가 모든 운동량$(1 \times 2 \; = \; 2 \times 1)$과 모든 에너지를 가져간다. 퍼텐셜 에너지(potential energy)는 $1/z^2$이므로 처음 에너지는 $1 + 1 = 2$이고, 마지막 에너지는 $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 = 2$이다.
- 원래 방정식을 수치적으로(룽게-쿠타(Runge–Kutta) 방법, 간격 10^{-4}) $t = 5$까지 계산하면 x_1, x_2, z에 대한 공식과 10^{-11} 이내로 일치하며, 최근접 거리는 $z = 0.8660\ldots = \sqrt{3}/2$이다.

흔한 실수

- $\dot{z}(0) = +1$로 놓는 것. P는 Q 쪽으로 움직이므로 간격은 줄어들고 있다.
- 모든 시각에서 $\mathrm{d}z/\mathrm{d}t = -\sqrt{4 - 3/z^2}$로 써서 $t = \frac{1}{4}$에서의 전환점을 놓치는 것.
- P의 방정식에서 질량 2를 빠뜨려 $\ddot{z} = 4/z^3$을 얻는 것.

STEP 너머

이것은 이체 문제(two-body problem)의 축소판이다. 질량 중심은 등속으로 움직이고, 상대 좌표는 같은 힘을 받는 **환산 질량**(reduced mass) $m_1 m_2/(m_1+m_2) = \frac{2}{3}$인 하나의 입자처럼 행동한다. 실제로 $\frac{2}{3}\ddot{z} = 2/z^3$이기 때문이다. 같은 분리를 통해 행성의 운동은 하나의 궤도 문제로 환원된다. 역세제곱 힘도 특별하다. z^2이 정확히 t에 대한 이차식이 되는데, 이것은 등각 역학(conformal mechanics)에서 연구하는 $1/z^2$ 퍼텐셜의 숨은 대칭성이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 환산 질량과 이체 운동을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.