풀이

STEP III 2004, 문제 10

역학 • 탄성 끈과 단진동

STEP III 2004, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

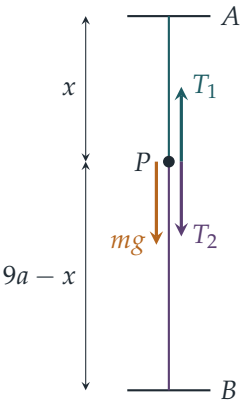
step.maths.org/questions/04-s3-q10

핵심 아이디어

각 줄은 팽팽할(taut) 때에만 훅의 법칙(Hooke's law)을 따르므로, 어느 줄이 팽팽한지에 따라 운동을 여러 단계로 나눈다. 각 단계에서 가속도는 $7a - x$의 상수배이므로 입자는 $x = 7a$를 중심으로 단진동(simple harmonic motion)을 하지만, 단계마다 ω가 다르다. 첫 번째 단계가 끝나는 시각과 그때의 속력을 구하고, 이를 두 번째 단계의 출발 조건으로 사용한다.

풀이

P를 입자로, 두 줄을 늘어나면 훅의 법칙을 따르고 느슨할(slack) 때에는 힘을 작용하지 않는 가벼운 줄로 모형화한다. A에서 아래쪽으로 잰 $x = AP$를 잡으면 $PB = 9a - x$이고, 아래쪽을 양의 방향으로 잡는다.



운동 방정식

$x > 6a$이면 줄 AP는 $x - 6a$만큼 늘어나므로, P를 위로 당기는 장력(tension)은

$$T_1 = \frac{6mg(x-6a)}{6a} = \frac{mg(x-6a)}{a}.$$

이다. $x < 7a$이면 줄 BP는 $(9a - x) - 2a = 7a - x$만큼 늘어나므로, P를 B 쪽으로 아래로 당기는 장력은

$$T_2 = \frac{6mg(7a-x)}{2a} = \frac{3mg(7a-x)}{a},$$

이고, BP가 느슨해지는 $x \geq 7a$에서는 $T_2 = 0$이다.

$6a < x < 7a$일 때, 두 줄이 모두 팽팽하므로 아래 방향으로 뉴턴의 운동 제2법칙(Newton's second law)을 적용하면

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - \frac{mg(x-6a)}{a} + \frac{3mg(7a-x)}{a} \\ &= \frac{mg}{a}(a - x + 6a + 21a - 3x) = \frac{mg}{a}(28a - 4x), \end{aligned}$$

이므로, 요구한 대로 $\ddot{x} = \dfrac{4g}{a}(7a - x)$이다.

$7a < x < 9a$일 때, AP만 팽팽하므로

$$m\ddot{x} = mg - \frac{mg(x-6a)}{a} = \frac{mg}{a}(7a - x),$$

이고, 요구한 대로 $\ddot{x} = \dfrac{g}{a}(7a - x)$를 얻는다.

B에 도달하는 시간

1단계: $6a \leq x \leq 7a$. $y = x - 7a$로 놓는다. 그러면 $\omega_1^2 = 4g/a$에 대하여 $\ddot{y} = -\omega_1^2 y$이고, 이는 $x = 7a$를 중심으로 하는 단진동이다. $y = -a$에서 정지 상태로 출발하므로

$$x = 7a - a\cos\omega_1 t, \qquad \dot{x} = a\omega_1 \sin\omega_1 t.$$

이다. $x = 6a$에서 정지 상태로 출발한 입자는 (그곳에서 $\ddot{x} > 0$이므로) 아래로 가속되고, 따라서 x는 $6a$에서부터 증가하며 $x = 7a$가 될 때까지 이 단계에 머문다. 이는 $\cos\omega_1 t = 0$일 때, 처음으로는 $\omega_1 t = \pi/2$일 때 일어나므로, 걸리는 시간은

$$t_1 = \frac{\pi}{2\omega_1} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{g}},$$

이고, 이때 입자는 속력 $a\omega_1 = 2\sqrt{ag}$로 아래로 움직이고 있다.

생각해 보기 $x = 7a$에서 방정식이 바뀐다. 어떻게 계속할까?

위치와 속도는 $x = 7a$에서 연속이므로, 1단계가 끝날 때의 상태가 2단계의 출발 조건이 된다. 그 지점에서 시간을 다시 0부터 잰다.

2단계: $7a \le x \le 9a$. 이제 $\omega_2^2 = g/a$에 대하여 $\ddot{y} = -\omega_2^2 y$이고, 중심 $y = 0$에서 속력 $2\sqrt{ag}$로 출발한다. 따라서 $x = 7a$ 이후 흐른 시간을 τ라 하면

$$x = 7a + \frac{2\sqrt{ag}}{\omega_2}\sin\omega_2\tau = 7a + 2a\sin\omega_2\tau.$$

이다. 진폭(amplitude)이 정확히 $2a$이므로, 입자는 $\sin\omega_2\tau = 1$일 때, 처음으로는 $\omega_2\tau = \pi/2$일 때 $x = 9a$, 즉 점 B에 도달한다. 그 순간 $\dot{x} = 2\sqrt{ag}\cos\omega_2\tau = 0$이므로, 입자는 속력 0으로 B에 도착한다. 이 단계에 걸리는 시간은

$$t_2 = \frac{\pi}{2\omega_2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

이다.

따라서 입자가 B에 도달하는 데 걸리는 시간은

$$t_1 + t_2 = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{g}} + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{a}{g}} = \frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

이다.

검산

에너지를 이용하면 P가 정지 상태로 꼭 B에 도달함을 확인할 수 있다. BP가 a만큼 늘어난 출발 시점과, AP가 $3a$만큼 늘어난 B 도착 시점을 비교하자. 탄성 에너지(elastic energy)는 $\frac{6mg\,a^2}{2\cdot 2a} = \frac{3}{2}mga$에서 $\frac{6mg\,(3a)^2}{2\cdot 6a} = \frac{9}{2}mga$로 바뀐다. 증가량은 $3mga$로, $3a$만큼 떨어지며 잃은 중력 위치 에너지와 정확히 같으므로 B에서의 운동 에너지(kinetic energy)는 0이다. 수치적으로, $a = 0.7$, $g = 9.8$로 두고 $x = 6a$에서 정지 상태로 출발하여 전체 운동 방정식을 단계적으로 계산하면 $t \approx 0.2099$에서 $x = 7a$, $t \approx 0.6297$에서 최저점 $x = 9a$를 얻으며, $\frac{3\pi}{4}\sqrt{a/g} = 0.6297$이다.

흔한 실수

- $x > 7a$에서 T_2를 사용하는 것: 줄은 밀 수 없으므로, BP가 $2a$보다 짧아지면 힘을 작용하지 않는다.
- 운동 전체에 ω_1을 사용하거나, 두 번째 단진동을 첫 번째 단진동에서 이어받은 속력 $2\sqrt{ag}$로 다시 시작하는 것을 잊는 것.
- 진폭 $2a$가 실제로 P를 B까지 데려가는지 확인하지 않고 두 번째 단계를 주기(period)의 4분의 1이라고 단정하는 것.

STEP 너머

이것은 조각별 선형 진동자(piecewise-linear oscillator)이다. 복원력은 선형이지만 강성이 $x = 7a$에서 바뀐다. 각 구간마다 위상 평면(phase plane)에서 고유한 타원이 있고, 궤적은 줄이 느슨해지는 지점에서 이어진 서로 다른 두 타원의 호로 이루어진다. 튀는 공에서 충돌 진동자에 이르기까지 이와 같은 계는 비선형 동역학(nonlinear dynamics)의 표준적인 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 진동과 에너지 방법을 깊이 있게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.