풀이

STEP III 2004, 문제 1

순수수학 • 쌍곡선 함수의 적분

STEP III 2004, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s3-q1

핵심 아이디어

두 피적분함수는 모두 하나의 쌍곡선함수(hyperbolic function)에 다른 쌍곡선함수로 만든 식을 곱한 꼴이고, $\sinh x\,\mathrm{d}x$와 $\cosh x\,\mathrm{d}x$는 각각 정확히 $\cosh x$와 $\sinh x$의 미분이다. 따라서 치환(substitution) $c = \cosh x$와 $s = \sinh x$를 하면 두 적분은 유리함수의 적분이 된다. 하나는 부분분수(partial fractions)가 필요하고, 다른 하나는 역탄젠트(arctangent)가 된다. "hence" 부분에서 결정적인 관찰은 $2\cosh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x$이므로 두 분모가 같은 함수라는 점이다.

풀이

첫 번째 적분

$c = \cosh x$로 놓으면 $\mathrm{d}c = \sinh x\,\mathrm{d}x$이고, 적분 구간의 끝 $x = 0$과 $x = a$는 $c = 1$과 $c = \cosh a$가 된다. 그러면

$$\int_0^a \frac{\sinh x}{2\cosh^2 x - 1}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\cosh a} \frac{\mathrm{d}c}{2c^2 - 1}.$$

분모는 $(\sqrt{2}\,c - 1)(\sqrt{2}\,c + 1)$로 인수분해되고,

$$\frac{1}{(\sqrt{2}\,c - 1)(\sqrt{2}\,c + 1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}\,c - 1} - \frac{1}{\sqrt{2}\,c + 1}\right),$$

이다. 이는 다시 통분하여 확인할 수 있다. 분자는 $\frac{1}{2}((\sqrt{2}c + 1) - (\sqrt{2}c - 1)) = 1$이다. 각 항을 적분하면 로그가 되며, 연쇄법칙(chain rule)에 의해 $1/\sqrt{2}$라는 인수가 추가로 붙는다.

$c \geq 1$에서 $\sqrt{2}c \pm 1$은 모두 양수이므로 절댓값 기호(modulus signs)는 필요 없다.

$$\int_1^{\cosh a} \frac{\mathrm{d}c}{2c^2-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\ln(\sqrt{2}\,c-1) - \ln(\sqrt{2}\,c+1)\Big]_1^{\cosh a}$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}\cosh a - 1}{\sqrt{2}\cosh a + 1}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right).$$

$-\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$이므로, 이것이 바로 구하려는 결과이다.

두 번째 적분

이번에는 $s = \sinh x$로 놓으면 $\mathrm{d}s = \cosh x\,\mathrm{d}x$이고, 적분 구간의 끝은 $s = 0$과 $s = \sinh a$이다.

$$\int_0^a \frac{\cosh x}{1+2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sinh a} \frac{\mathrm{d}s}{1+(\sqrt{2}\,s)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\arctan(\sqrt{2}\,s)\Big]_0^{\sinh a}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sinh a).$$

무한 구간의 적분

생각해 보기 두 피적분함수의 분모는 생김새가 다르다. 어떻게 두 적분을 뺄 수 있을까?

$\cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x$를 이용하면

$$2\cosh^2 x - 1 = 2 + 2\sinh^2 x - 1 = 1 + 2\sinh^2 x,$$

이므로 두 분모는 같고,

$$\int_0^a \frac{\cosh x - \sinh x}{1+2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sinh a) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}\cosh a - 1}{\sqrt{2}\cosh a + 1}\right)$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right).$$

이제 $a \to \infty$로 보낸다. $\sinh a \to \infty$이므로 $\arctan(\sqrt{2}\sinh a) \to \frac{\pi}{2}$이다. $\cosh a \to \infty$이므로

$$\frac{\sqrt{2}\cosh a - 1}{\sqrt{2}\cosh a + 1} = \frac{1 - 1/(\sqrt{2}\cosh a)}{1 + 1/(\sqrt{2}\cosh a)} \to 1,$$

이고, ln이 1에서 연속(continuous)이므로 그 로그는 0으로 수렴한다. 세 항 모두 유한한 극한을 가지므로 이상적분(infinite integral)은 수렴(converges)하고

$$\int_0^\infty \frac{\cosh x - \sinh x}{1+2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

마지막 적분

생각해 보기 $\cosh x - \sinh x$와 $1 + 2\sinh^2 x$를 e^x로 나타내면 어떤 모양일까?

$u = e^x$로 놓으면 $\cosh x - \sinh x = e^{-x} = 1/u$이고, 배각 공식(double-angle formula)을 이용하면

$$1 + 2\sinh^2 x = \cosh 2x = \frac{u^2 + u^{-2}}{2} = \frac{u^4 + 1}{2u^2}.$$

또 $\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$이므로 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$이고, 적분 구간의 끝 $x = 0$, $x \to \infty$는 $u = 1$, $u \to \infty$가 된다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\cosh x - \sinh x}{1 + 2\sinh^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int_1^\infty \frac{1}{u} \cdot \frac{2u^2}{1 + u^4} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= 2\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^4}.\end{aligned}$$

앞의 결과를 반으로 나누면

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right).$$

이 식은 더 깔끔하게 정리된다. $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = (\sqrt{2}+1)^2$이므로 로그는 $2\ln(1+\sqrt{2})$이고

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1 + u^4} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} - \frac{\ln(1 + \sqrt{2})}{2\sqrt{2}} \approx 0.2437.$$

검산

- $a = 0$일 때 첫 번째 공식은 $\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = 0$을 준다. 길이가 0인 구간에서의 적분이므로 당연히 그래야 한다.
- 최종 답은 양수이고 $\int_1^\infty u^{-4}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}$보다 작다. $1 + u^4 > u^4$이므로 타당하다.
- $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}$에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면($u = 1/t$로 치환하면 $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$가 된다) 0.243748을 얻으며, 이는 공식과 소수점 아래 열두 자리까지 일치한다. x에 대한 이상적분은 수치적으로 그 두 배인 0.487495로 확인된다.

흔한 실수

- $\frac{1}{\sqrt{2}c \pm 1}$이나 $\frac{1}{1+2s^2}$을 적분할 때 생기는 인수 $\frac{1}{\sqrt{2}}$를 빠뜨린다.
- 치환할 때 적분 구간을 바꾸지 않거나, 답을 c나 s로 나타낸 채로 둔다.

- 마지막 부분에서 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$임을 잊으면 $2u/(1+u^4)$가 되어 발산하는(divergent) 적분을 얻는다.

STEP 너머

최종 결과는 고전적인 결과의 일부이다. $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$이고, 치환 $u \mapsto 1/u$를 하면 $[0,1]$과 $[1,\infty)$에서의 두 부분이 각각 $\int_0^1 \frac{1}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$와 $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$임을 알 수 있는데, 이 둘의 합과 차는 초등적으로 계산된다. 대학 1학년 과정에서는 경로적분(contour integration)과 유수(residues)를 이용하는 더 매끄러운 방법도 배우게 되는데, 이 방법은 $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$을 한 번에 계산한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이 아이디어를 배우기에 아름다운 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.