풀이

STEP II 2004, 문제 9

역학 • 무게중심

> **STEP II 2004, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q9

핵심 아이디어

곡면을 바닥에 대고 놓인 반구(hemisphere)는 구면 위의 한 점에서 평면에 닿아 있고, 구의 법선(normal)은 언제나 구의 중심을 지난다. 따라서 반력(reaction)은 밑면의 중심 O를 지나는 연직선을 따라 작용하고, 평형(equilibrium) 상태에서는 그 위에 놓인 물체 전체의 무게중심(centre of gravity)이 바로 그 연직선 위에 있어야 한다. 그러면 이 문제의 각 부분은 결국 "무게중심을 구하고, 그것이 O의 바로 아래에 올 때까지 기울인다"는 것에 지나지 않는다. 물체에 고정된 좌표를 쓰면 이 과정이 수월해진다.

풀이

모형과 평형 조건

반구를 한 점 C에서 수평면에 닿아 있는 강체(rigid body)로, 입자를 가장자리에 고정된 질점(point mass)으로 본다. 작용하는 힘은 무게와 C에서의 접촉력(contact force)뿐이다. C가 구면 위에 있으므로 C에서의 법선은 O를 지나고, 평면이 수평이므로 이 법선은 연직이다. 따라서 C는 O의 바로 아래에 있고, 물체가 어떻게 구르든 O의 높이는 r로 유지된다.

평형 상태에서 접촉력은 전체 무게와 균형을 이루어야 하므로 (마찰(friction)이 없으니) 연직이며, 무게와 같은 직선 위에서 작용한다. 그러므로 다음이 성립한다.

평형 상태에서 계의 무게중심은 O를 지나는 연직선 위에 있다.

물체가 밑면의 곡면 쪽을 바닥에 대고 있으므로, 무게중심은 O보다 아래에 있다.

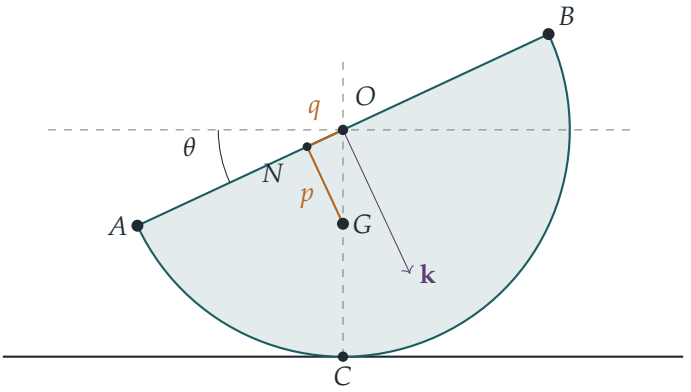
물체 좌표와 처음 위치

물체에 서로 수직인 두 단위벡터(unit vector)를 고정한다. $\mathbf{k}$는 대칭축(axis of symmetry)을 따라 O에서 곡면 쪽을 향하는 벡터이고, $\mathbf{e}$는 밑면 위에 있는 벡터이다. G는 밑면에서 거리 p, O에서 거리 $\sqrt{p^2+q^2}$만큼 떨어져 있으므로, G에서 밑면에 내린 수선의 발 N은 O에서 거리 q만큼 떨어져 있다. $\mathbf{e}$가 O에서 N 쪽을 향하도록 잡으면

$$\overrightarrow{OG} = p\,\mathbf{k} + q\,\mathbf{e}.$$

을 얻는다.

밑면은 $\mathbf{k}$에 수직이므로, 밑면이 수평과 이루는 각은 $\mathbf{k}$가 연직선과 이루는 각과 같다. 처음 위치에서 $\overrightarrow{OG}$는 연직 아래 방향이므로, 이 각 θ는 $\tan\theta = q/p$를 만족한다.



가장자리의 어느 점이 가장 낮을까? 가장자리 위의 점은 O로부터 $r(\cos\phi\,\mathbf{e} + \sin\phi\,\mathbf{f})$만큼 떨어져 있다. 여기서 $\mathbf{f}$는 두 벡터 모두에 수직인 세 번째 단위벡터이다. 이 점이 O보다 얼마나 아래에 있는지는 아래 방향 단위벡터 $(p\mathbf{k} + q\mathbf{e})/\sqrt{p^2+q^2}$ 방향의 성분(component), 즉

$$\frac{rq\cos\phi}{\sqrt{p^2+q^2}},$$

이고, 이 값은 $\phi = 0$일 때 가장 크다($q > 0$이라 하자. $q = 0$이면 밑면이 수평이 되어 가장 낮은 점이 하나로 정해지지 않는다). 따라서

$$\overrightarrow{OA} = r\,\mathbf{e}, \qquad \overrightarrow{OB} = -r\,\mathbf{e}.$$

이다. 말로 하면, A는 대칭축에 대해 G와 같은 쪽에 있고 O와 G를 지나는 연직 평면 위에 있으며, 문제 전체가 이 평면 안에서 다루어진다.

입자가 A에 있을 때

반구와 입자를 합친 무게중심 G_A는

$$(M+m)\,\overrightarrow{OG_A} = M(p\,\mathbf{k} + q\,\mathbf{e}) + mr\,\mathbf{e} = Mp\,\mathbf{k} + (Mq + mr)\,\mathbf{e}.$$

로 주어진다. 새 평형 상태에서 $\overrightarrow{OG_A}$는 연직이므로, θ의 경우와 똑같이 $\mathbf{k}$가 연직선과 이루는 각(곧 밑면이 수평과 이루는 각)은 $\overrightarrow{OG_A}$와 $\mathbf{k}$가 이루는 각이다.

$$\tan\alpha = \frac{Mq+mr}{Mp}, \qquad \text{따라서} \qquad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Mq+mr}{Mp}\right).$$

예상대로 A에 더해진 무게가 A를 더 아래로 끌어내리므로 $\alpha > \theta$이다.

? **생각해 보기** 밑면이 이루는 각이 왜 $\overrightarrow{OG_A}$와 대칭축이 이루는 각과 같을까?

밑면은 축 $\mathbf{k}$에 수직이고, 수평선은 연직선에 수직이다. 한 쌍의 직선을 둘 다 직각만큼 회전해도 두 직선이 이루는 각은 변하지 않으므로, 밑면과 수평선이 이루는 각은 $\mathbf{k}$와 연직선이 이루는 각과 같다. 평형 상태에서 O를 지나는 연직선은 직선 OG_A이고, 이 직선의 $\mathbf{k}$ 방향과 $\mathbf{e}$ 방향 성분은 ($M+m$으로 나누면) 각각 Mp와 $Mq+mr$이다. 이 직선이 $\mathbf{k}$와 이루는 각의 탄젠트는 이 두 값의 비이다.

입자가 B에 있을 때

이제 입자는 $-r\,\mathbf{e}$에 있으므로, 새 무게중심 G_B는

$$(M+m)\,\overrightarrow{OG_B} = Mp\,\mathbf{k} + (Mq-mr)\,\mathbf{e}, \qquad \text{따라서} \qquad \tan\beta = \frac{Mq-mr}{Mp}.$$

를 만족한다. m이 작으므로 $mr < Mq$이고, 따라서 $\overrightarrow{OG_B}$는 여전히 축에 대해 앞에서와 같은 쪽에 있으며 밑면은 더 작은 각 β만큼 같은 방향으로 기운다.

두 위치 사이의 각

덧셈정리(compound-angle formula)에 의해

$$\begin{aligned}\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\dfrac{2mr}{Mp}}{1+\dfrac{(Mq+mr)(Mq-mr)}{M^2p^2}} \\ &= \frac{2mMrp}{M^2p^2+M^2q^2-m^2r^2} = \frac{2mMrp}{M^2\left(p^2+q^2\right)-m^2r^2},\end{aligned}$$

이다. 세 번째 단계에서는 분자와 분모에 M^2p^2을 곱하였다. 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $q=0$이면(예를 들어 균질한 반구) 두 위치는 서로 거울상이다. 즉 $\tan\alpha = mr/(Mp)$이고 $\beta=-\alpha$이다. 이때 공식은 $t=mr/(Mp)$에 대해 $\tan 2\alpha = 2t/(1-t^2)$, 즉 배각 공식(double-angle formula)을 주므로 마땅히 그래야 할 결과와 일치한다.

- $m \to 0$이면 α와 β는 모두 θ로 가까워지고 우변은 0으로 수렴한다.
- $M = 1, m = 0.1, r = 1, p = \frac{3}{8}, q = \frac{1}{8}$로 두면 $\tan\alpha = 0.6$, $\tan\beta = \frac{1}{15}$이므로 $\alpha \approx 30.96°$, $\beta \approx 3.81°$이다. 결과식의 양변은 모두 $\frac{20}{39} \approx 0.5128$이다. 또한 임의로 고른 2000가지 값의 조합에 대해 무게중심의 높이를 최소화하여 평형 각을 수치적으로 구해 보았더니, $\tan\alpha$와 $\tan\beta$에 대한 공식과 10^{-13} 이내에서 일치하였다.

흔한 실수

- G를 O의 아래가 아니라 **처음 위치에서의 접점**의 연직 아래에 두는 것. 접점은 물체가 구르면 움직인다. 언제나 접점의 바로 위에 있는 점은 O이다.
- A를 축의 반대쪽에 잡는 것. 가장자리에서 가장 낮은 점은 G와 같은 쪽에 있으며, 그렇기 때문에 A에 놓인 입자가 기울기를 **증가시킨다**.
- $mr > Mq$일 때 β를 양수로 취급하는 것. 이 경우 밑면은 반대 방향으로 기울고, β를 음수로 셀 때에만 공식이 성립한다. m이 작다는 조건은 바로 이 경우를 배제한다.

STEP 너머

여기서 쓴 원리는, 중력과 하나의 접촉력만 받으며 평형을 이루는 강체는 질량중심(centre of mass)이 그 접촉력의 작용선 위에 있다는 것이다. 이는 질량중심의 높이가 정류값을 가진다는 것과 같으며, 물체가 구를 때 그 높이를 살펴보면 평형이 안정(stable)한지도 판별할 수 있다. 이것이 대학 1학년 역학에서 흔들리거나 구르는 물체에 대해 다루는 안정성의 에너지 방법(energy method)의 출발점이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이러한 관점에서 질량중심과 강체의 평형을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.