풀이

STEP II 2004, 문제 8

순수수학 • 미분방정식의 비교

STEP II 2004, 8번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s2-q8

핵심 아이디어

$0 \le x < 1$인 동안 우변(right-hand side)은 양수이므로 x는 t에 대해 증가하고, 따라서 방정식을 뒤집어 볼 수 있다. 즉 t를 x의 함수(function), 곧 높이 0에서 높이 x까지 올라가는 데 걸리는 시간으로 볼 수 있다. 모든 높이에서 기울기(gradient)가 더 크다는 것은 모든 높이에 더 빨리 도달한다는 뜻이므로, 주어진 우변 사이의 부등식(inequality)만으로 세 그래프의 위아래 순서가 곧바로 정해진다. 그러면 $x = 1$까지 올라가는 데 유한한 시간이 걸리는지 무한한 시간이 걸리는지는 어떤 이상적분(improper integral)이 수렴(converge)하는지의 문제가 된다.

풀이

이 풀이 전체에서 지수가 n인 경우의 해를 $x_n(t)$로 쓴다. $t = 0$에서 $x = 0$이고, 모든 n에 대해 기울기는 $(1-0)^{1/n} = 1$이므로 모든 곡선은 직선 $x = t$를 따라 원점을 출발한다. $0 \le x < 1$인 동안 기울기는 엄밀히 양수이므로 x는 증가하고,

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{(1-x^n)^{1/n}}, \qquad \text{따라서} \qquad t_n(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^n)^{1/n}}$$

는 $0 \le x < 1$에 대해 해가 높이 x에 도달하는 시각이다.

소문항 (i)

$n = 1$이면 방정식은 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1 - x$이다. 변수분리(separation of variables)를 하면(해를 따라 $1 - x > 0$이므로 문제없다)

$$t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{1-\xi} = -\ln(1-x), \qquad \text{따라서} \qquad x = 1 - \mathrm{e}^{-t}.$$

그래프는 기울기 1로 원점에서 출발하여 계속 증가하고, 위로 볼록(concave)하며(기울기 e^{-t}가 감소한다), $t \to \infty$일 때 점근선(asymptote) $x = 1$에 다가가지만 결코 도달하지 않는다. 실제로 $x \to 1$일 때 $t_1(x) = -\ln(1-x) \to \infty$이다. 아래 그림에서 가장 아래 곡선이 이것이다.

소문항 (ii)

부등식. $0 < x < 1$이면 $1 - x$와 $(1-x^2)^{1/2}$가 모두 양수이므로, 주어진 부등식은 양변을 제곱하여 얻은 부등식과 동치이다.

$$(1-x)^2 < 1 - x^2 \iff 1 - 2x + x^2 < 1 - x^2 \iff 2x^2 < 2x \iff x < 1,$$

여기서 마지막 단계는 $2x > 0$으로 나눈 것이다. $x < 1$은 참이므로 $1 - x < (1-x^2)^{1/2}$도 참이다.

개형. 구간 $(0,1)$의 모든 높이 x에서 $n = 2$ 곡선은 $n = 1$ 곡선보다 가파르다. 따라서 $0 < x < 1$에 대해

$$t_2(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}} < \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{1-\xi} = t_1(x),$$

이다. $(0, x]$에서 왼쪽 피적분함수가 엄밀히 더 작기 때문이다. 그러므로 $n = 2$인 해는 모든 높이에 엄밀히 더 빨리 도달하고, 두 해가 모두 증가하므로 모든 시각 $t > 0$에서($x_2 < 1$인 동안) $n = 2$ 곡선은 $n = 1$ 곡선보다 엄밀히 위에 있다. 두 곡선 모두 기울기 1로 원점을 출발하므로 원점 근처에서는 매우 가깝고, t가 커질수록 벌어진다.

> ? **생각해 보기** 두 곡선은 원점에서 기울기가 같다. 왜 $n = 1$ 곡선이 나중에 슬그머니 위로 올라갈 수 없을까?

위로 올라가려면 어떤 높이 x에서 $n = 2$ 곡선을 따라잡아야, 즉 같은 시각에 x에 도달해야 한다. 그러나 모든 $x \in (0,1)$에 대해 $t_2(x) < t_1(x)$이다. 느리게 올라가는 쪽은 언제나 엄밀히 늦다. (같은 말로, 두 곡선이 같은 높이에 있는 곳에서는 언제나 $n = 2$ 곡선이 더 가파르므로 결코 추월당할 수 없다.)

풀기. $0 \le y < \frac{1}{2}\pi$이고 $t = 0$에서 $y = 0$이 되도록 $x = \sin y$로 놓는다. 그러면 $\cos y > 0$이므로 $(1-x^2)^{1/2} = (\cos^2 y)^{1/2} = \cos y$이고, 방정식은 다음과 같이 된다.

$$\cos y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos y \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 \quad \Longrightarrow \quad y = t,$$

여기서 $t = 0$에서 $y = 0$임을 이용했다. 따라서 해는

$$x = \sin t \qquad \text{단, } 0 \le t < \tfrac{1}{2}\pi.$$

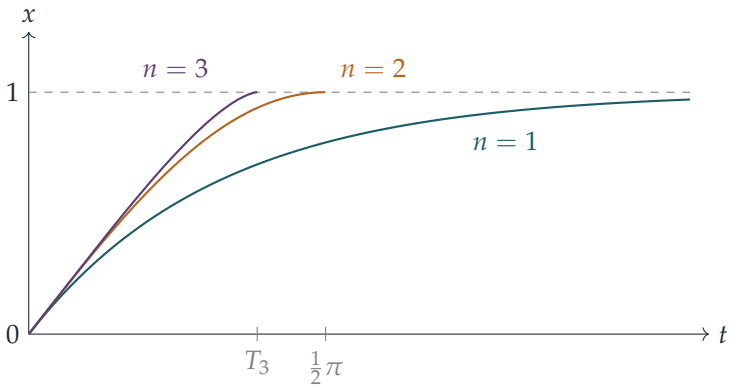
이다. 이는 $t_2(x) = \arcsin x$와 일치한다. $n = 1$인 경우와 달리 이 해는 유한한 시간 안에, 즉 $t = \frac{1}{2}\pi$에서 $x = 1$에 도달하며, 그때의 기울기는 $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$이어서 직선 $x = 1$에 접한다.

소문항 (iii)

$(0,1)$에서 주어진 부등식 $(1-x^2)^{1/2} < (1-x^3)^{1/3}$을 앞에서와 똑같이 이용하면, 모든 높이에서 $n=3$ 곡선이 $n=2$ 곡선보다 가파르므로

$$t_3(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^3)^{1/3}} < \int_0^x \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}} = \arcsin x \qquad (0<x<1).$$

이다. 따라서 $n=3$ 곡선은 다른 곡선들처럼 기울기 1로 원점을 출발하고, $t>0$에서 $x=\sin t$보다 엄밀히 위에 있다. 그 기울기 $(1-x^3)^{1/3}$은 $x\to 1$일 때 0으로 떨어지므로, 이 곡선 역시 직선 $x=1$과 만나면서 평평해진다.



$t=\frac{1}{2}\pi$ **이전에** $x=1$**에 도달함**. 개형을 보면 $n=3$ 곡선은 $\sin t$보다 위에 있고, $\sin t$는 $\frac{1}{2}\pi$에서 1에 도달한다. 따라서 $n=3$ 곡선은 늦어도 그때까지는 1에 도달해야 한다. 엄밀히 더 이르다는 것을 보이기 위해 적분의 비교에서 $x\to 1$로 보낸다. $x=1$에 도달하는 시각은

$$T_3 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^3)^{1/3}}.$$

이다. 이 이상적분은 수렴한다. $[0,1]$에서 $1-\xi^3=(1-\xi)(1+\xi+\xi^2)\geq 1-\xi$이므로 피적분함수는 $(1-\xi)^{-1/3}$ 이하이고, 이 함수의 $[0,1]$에서의 적분은 $\frac{3}{2}$이기 때문이다. 또 $(0,1)$에서 피적분함수가 $(1-\xi^2)^{-1/2}$보다 엄밀히 작으므로

$$T_3 < \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\xi}{(1-\xi^2)^{1/2}} = \Big[\arcsin\xi\Big]_0^1 = \tfrac{1}{2}\pi.$$

이다. 따라서 $n=3$인 해는 요구한 대로 $T_3<\frac{1}{2}\pi$인 시각 T_3에 $x=1$에 도달한다. (일단 도달하면 기울기가 0이고 음수가 될 수 없으므로 $x=1$에 머문다.)

검산

- 다시 대입해 보면 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-\mathrm{e}^{-t}) = \mathrm{e}^{-t} = 1-x$이고, $0\leq t\leq\frac{1}{2}\pi$에서 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin t = \cos t = (1-\sin^2 t)^{1/2}$이다. 각 방정식을 룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법으로 수치적으로 푼 해도 이 식들과 일치한다.

- 수치적으로 $T_3 \approx 1.2092$로, $\frac{1}{2}\pi \approx 1.5708$보다 넉넉히 작다. 사실 정확히 $T_3 = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$이며(아래 참고), 소수점 아래 일곱째 자리까지 일치한다.
- 높이 $x = 0.9$에서 세 시각은 $-\ln 0.1 \approx 2.30$, $\arcsin 0.9 \approx 1.12$, $t_3(0.9) \approx 0.98$로, 예측한 순서와 같다.

흔한 실수

- 비교하는 것이 같은 시각이 아니라 **같은 높이에서의** 기울기라는 점을 언급하지 않고 "기울기가 더 크니까 곡선이 더 위에 있다"고 주장하는 것. t를 x의 함수로 바꾸어 보면 논증이 정직해진다.
- $\cos y \geq 0$인 이유를 말하지 않고 $(1 - \sin^2 y)^{1/2} = \cos y$로 쓰는 것. 이를 위해서는 $0 \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$가 필요하다.
- $x = \sin t$를 $t = \frac{1}{2}\pi$ 너머까지 이어 가는 것. 그러면 감소하게 되지만, 방정식에 의해 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t \geq 0$이어야 한다.

STEP 너머

해가 유한한 시간에 $x = 1$에 도달한 뒤 영원히 $x = 1$에 머무는 현상은 $(1 - x^n)^{1/n}$이 $x = 1$에서 립시츠(Lipschitz) 조건을 만족하지 않기 때문에 일어난다. 바로 이 지점에서 미분방정식(differential equation)의 유일성 정리(uniqueness theorem)가 성립하지 않게 된다($n = 2$이면 $x = 1$과 $x = \sin t$가 모두 $(\frac{1}{2}\pi, 1)$을 지난다). 도달 시각은 베타 함수(Beta function)로 나타난다. $u = \xi^n$으로 치환하면 $T_n = \frac{1}{n}B(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}) = \dfrac{\pi/n}{\sin(\pi/n)}$을 얻는데, 이는 $n = 2$일 때 $\frac{1}{2}\pi$, $n = 3$일 때 $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$이고, $n \to \infty$일 때 1을 향해 감소한다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 해의 존재성과 유일성, 그리고 해의 비교를 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.