풀이

STEP II 2004, 문제 7

순수수학 • 이분법

> **STEP II 2004, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q7

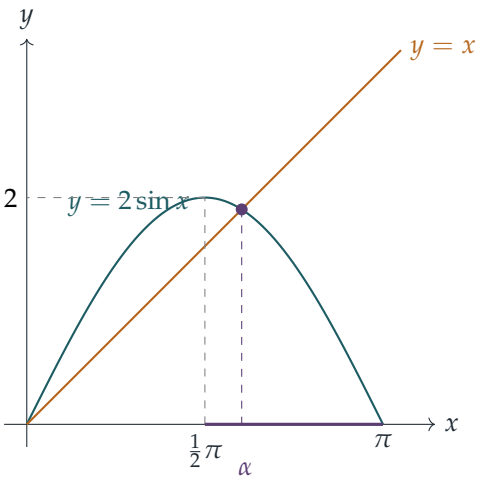
핵심 아이디어

$2\sin x - x = 0$의 근(root)은 곡선 $y = 2\sin x$와 직선 $y = x$가 만나는 점이므로, 그래프를 다루는 부분은 사인 곡선 하나와 직선 하나에 관한 문제이다. 그다음 이분법(bisection)의 각 단계는 매번 하나의 질문으로 귀결된다. 중점에서 $2\sin c$가 c보다 큰가, 작은가? 반각 공식(half-angle formula)을 쓰면 $\frac{5}{8}\pi$와 $\frac{9}{16}\pi$의 사인값이 중첩된 제곱근으로 바뀌고, 두 양수의 제곱을 비교하면 주어진 근삿값만으로 계산을 끝낼 수 있다.

풀이

I_0에서 근이 정확히 하나임

$\mathrm{f}(x) = 0 \iff 2\sin x = x$이므로, 근은 $y = 2\sin x$와 $y = x$가 만나는 점들의 x좌표이다.



$[\frac{1}{2}\pi, \pi]$에서 다음이 성립한다.

- $x = \frac{1}{2}\pi$에서 곡선의 높이는 2이고 직선의 높이는 $\frac{1}{2}\pi < 2$이다($\pi < 4$이므로). 따라서 곡선이 직선보다 위에 있다.
- $x = \pi$에서 곡선의 높이는 0이고 직선의 높이는 $\pi > 0$이다. 따라서 곡선이 직선보다 아래에 있다.
- 이 구간에서 곡선 $y = 2\sin x$는 감소(decreasing)하고 직선 $y = x$는 증가(increasing)한다.

두 그래프 모두 연속(continuous)이므로 곡선은 이 구간 어딘가에서 반드시 직선과 교차한다. 또 하나는 내려가고 다른 하나는 올라가므로, 곡선이 일단 직선 아래로 내려가면 다시는 위로 올라올 수 없다. 따라서 둘은 정확히 한 번 교차하고, $f(x) = 0$은 I_0에서 정확히 하나의 근 α를 가진다. f로 말하면 $f(\frac{1}{2}\pi) = 2 - \frac{1}{2}\pi > 0$, $f(\pi) = -\pi < 0$이고, 이 구간에서 f는 순감소(strictly decreasing)한다.

아래의 모든 이분법 단계에서는 f의 부호가 바뀌는 쪽 절반을 남긴다. $f(\frac{1}{2}\pi) > 0$이므로 모든 것은 $f(c_n)$의 부호로 결정된다. $f(c_n) < 0$이면 근은 c_n의 왼쪽에 있고, $f(c_n) > 0$이면 오른쪽에 있다.

I_1 구하기

여기서 $c_0 = \frac{3}{4}\pi$이고

$$f(\tfrac{3}{4}\pi) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \tfrac{3}{4}\pi \approx 1.4 - \tfrac{3}{4}\sqrt{10}.$$

이다. $\sqrt{10} > 3$이므로 $\frac{3}{4}\sqrt{10} > 2.25 > 1.4$이고, 따라서 $f(c_0) < 0$이다. $f(a_0) > 0$과 합치면 $f(a_0)f(c_0) < 0$이므로

$$I_1 = [\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{3}{4}\pi].$$

이다.

I_2 구하기

이제 $c_1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + \frac{3}{4}\pi) = \frac{5}{8}\pi$이고, $2\sin\frac{5}{8}\pi - \frac{5}{8}\pi$의 부호를 알아야 한다.

> **생각해 보기** 계산기 없이 $\sin\frac{5}{8}\pi$를 어떻게 구할 수 있을까?

$\sin\frac{5}{8}\pi = \sin(\pi - \frac{5}{8}\pi) = \sin\frac{3}{8}\pi = \cos\frac{1}{8}\pi$를 이용한 다음, $\theta = \frac{1}{8}\pi$로 두고 배각 공식(double-angle formula) $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$을 쓰면

$$4\cos^2\tfrac{1}{8}\pi = 2\big(1 + \cos\tfrac{1}{4}\pi\big) = 2 + \sqrt{2}.$$

이다. 따라서 $(2\sin\frac{5}{8}\pi)^2 = 2 + \sqrt{2}$이다. $2\sin\frac{5}{8}\pi$와 $\frac{5}{8}\pi$는 모두 양수이므로 둘의 제곱을 비교해도 된다.

$$(2\sin\tfrac{5}{8}\pi)^2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3.4, \qquad (\tfrac{5}{8}\pi)^2 \approx \tfrac{25}{64}\cdot 10 = \tfrac{250}{64} \approx 3.9.$$

그러므로 $2\sin\frac{5}{8}\pi < \frac{5}{8}\pi$, 즉 $f(c_1) < 0$이다. 이번에도 $f(a_1) = f(\frac{1}{2}\pi) > 0$이므로 $f(a_1)f(c_1) < 0$이고

$$I_2 = [\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{5}{8}\pi],$$

이며, 이것이 보이려던 결과이다.

I_3 구하기

이제 $c_2 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + \frac{5}{8}\pi) = \frac{9}{16}\pi$이다. 앞에서와 같이 $\sin\frac{9}{16}\pi = \sin\frac{7}{16}\pi = \cos\frac{1}{16}\pi$이고, $\theta = \frac{1}{16}\pi$로 두고 배각 공식을 쓰면

$$(2\sin\tfrac{9}{16}\pi)^2 = 4\cos^2\tfrac{1}{16}\pi = 2\big(1 + \cos\tfrac{1}{8}\pi\big) = 2 + 2\cos\tfrac{1}{8}\pi = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}},$$

이다. 여기서 앞 단계에서 얻은 $2\cos\frac{1}{8}\pi = \sqrt{2+\sqrt{2}}$를 이용하였다. $\sqrt{2} \approx 1.4$로 두면 $\sqrt{2+\sqrt{2}} \approx \sqrt{3.4} > 1.8$이므로($1.8^2 = 3.24$이기 때문이다)

$$(2\sin\tfrac{9}{16}\pi)^2 > 3.8, \qquad (\tfrac{9}{16}\pi)^2 \approx \tfrac{81}{256}\cdot 10 = \tfrac{810}{256} < 3.2.$$

이다. 따라서 $2\sin\frac{9}{16}\pi > \frac{9}{16}\pi$, 즉 $f(c_2) > 0$이다. 이번에는 $f(a_2)f(c_2) > 0$이고, 반면 $f(c_2)f(b_2) = f(\frac{9}{16}\pi)\,f(\frac{5}{8}\pi) < 0$이다. 그러므로

$$I_3 = [\tfrac{9}{16}\pi, \tfrac{5}{8}\pi].$$

이다.

여기서 근삿값을 써도 안전하다. 각 중점에서 비교하는 두 값은 약 0.5 이상 차이가 나는데, 이는 $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$이나 $\pi \approx \sqrt{10}$로 생기는 오차보다 훨씬 크다.

검산

- 이분법을 수치적으로 실행하면 같은 구간들이 나오고, 근은 $\alpha \approx 1.8955$로 $\frac{9}{16}\pi \approx 1.767$과 $\frac{5}{8}\pi \approx 1.963$ 사이에 있다.
- 정확한 값도 근삿값과 일치한다. $f(\frac{3}{4}\pi) \approx -0.942$, $f(\frac{5}{8}\pi) \approx -0.116$, $f(\frac{9}{16}\pi) \approx 0.194$이다.
- 각 구간의 길이는 바로 앞 구간의 절반이다. $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{1}{8}\pi$, $\frac{1}{16}\pi$.

흔한 실수

- 부호 변화는 보였지만 근이 왜 **하나뿐인지**는 설명하지 않는 것. 부호 변화만으로는 근이 적어도 하나 있다는 것만 알 수 있다. 유일성을 보이려면 감소와 증가를 비교하는 논증이 필요하다.
- $2\sin c$와 c가 모두 양수임을 먼저 확인하지 않고 제곱해서 비교하는 것.

STEP 너머

부호 변화 논증은 중간값 정리(intermediate value theorem)로, 대학 해석학(analysis) 강의에서 처음 만나는 중요한 정리 가운데 하나이다. 이 정리의 증명에는 실수의 완비성(completeness)이 필요하며, 이분법은 본질적으로 그 증명을 알고리즘으로 실행한 것이다. 이분법은 항상 수렴(converge)하지만 느리다(한 단계에 이진 자릿수 하나씩). 뉴턴-랩슨 방법(Newton–Raphson method) 같은 방법은 훨씬 빠르게 수렴하지만 실패할 수도 있으므로, 수치해석(numerical analysis)은 상당 부분 안전성과 속도 사이의 균형을 맞추는 일이다. 이론에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학의 이해)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.