풀이

STEP II 2004, 문제 6

순수수학 • 벡터의 분해

> **STEP II 2004, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q6

핵심 아이디어

벡터를 $\mathbf{a}$ 방향의 부분과 $\mathbf{a}$에 수직(perpendicular)인 부분으로 나누는 것은 바로 사영(projection)이다. $\mathbf{a}$가 단위벡터(unit vector)이므로, 임의의 벡터 $\mathbf{v}$의 그 방향 성분(component)은 $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{a}$이다. 둘째 부분은 같은 아이디어를 한 차원 올린 것이다. 벡터 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{q}$는 Π 안의 서로 수직인 두 방향이고, $\mathbf{R}$은 이 둘에 수직인 세 번째 방향을 맡는다. 따라서 각 방향으로 차례로 사영할 수도 있고, 미지의 스칼라배를 놓고 내적(dot product)으로 수직 조건을 부과할 수도 있다. 여기서는 두 번째 방법으로 풀고, 첫 번째 방법은 검산에 쓴다.

풀이

벡터 p와 q

$\mathbf{p}$는 $\mathbf{a}$에 평행하므로 $\mathbf{p}=\lambda\mathbf{a}$로 놓는다. 그러면

$$\mathbf{q}=\mathbf{a}+\mathbf{b}-\lambda\mathbf{a}=(1-\lambda)\mathbf{a}+\mathbf{b},$$

이고, 이 벡터는 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 그러하듯 자동으로 Π 위에 놓인다. $\mathbf{q}$가 $\mathbf{a}$에 수직이려면 다음이 성립해야 한다.

$$0=\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}=(1-\lambda)\,|\mathbf{a}|^2+\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(1-\lambda)+3,$$

여기서 $|\mathbf{a}|=1$과 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=3$을 이용하였다. 따라서 $\lambda=4$이고

$$\boxed{\mathbf{p}=4\mathbf{a},\qquad \mathbf{q}=\mathbf{b}-3\mathbf{a}.}$$

실제로 $\mathbf{q}\cdot\mathbf{a}=3-3=0$이고 $\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$이다. (같은 말로, $\mathbf{p}$는 사영 $((\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}=4\mathbf{a}$이다.)

벡터 P, Q, R

먼저 앞으로 필요한 사실 몇 가지를 정리한다. $|\mathbf{b}| = 5$이므로

$$|\mathbf{q}|^2 = |\mathbf{b}|^2 - 6\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + 9|\mathbf{a}|^2 = 25 - 18 + 9 = 16,$$

이고, 따라서 $|\mathbf{q}| = 4$이다. 특히 $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$이므로 $\mathbf{b}$는 $\mathbf{a}$에 평행하지 않으며, $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$는 평면 Π를 생성(span)한다.

$\mathbf{P} = \alpha\mathbf{a}$, $\mathbf{Q} = \beta\mathbf{q} = \beta(\mathbf{b} - 3\mathbf{a})$로 놓자. 그러면 $\mathbf{R}$은 반드시 다음과 같아야 한다.

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} - \alpha\mathbf{a} - \beta(\mathbf{b} - 3\mathbf{a}) = \mathbf{c} + u\,\mathbf{a} + v\,\mathbf{b}, \qquad \text{여기서} u = 1 - \alpha + 3\beta,\ v = 1 - \beta.$$

> **생각해 보기** "$\mathbf{R}$이 Π에 수직이다"라는 조건을 어떻게 방정식으로 바꿀 수 있을까?

벡터가 평면에 수직일 필요충분조건은 그 평면 안의 평행하지 않은 두 벡터에 모두 수직인 것이다. 방금 $\mathbf{a}$와 $\mathbf{b}$가 그런 한 쌍임을 보았다. 따라서 조건은 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = 0$이고 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{b} = 0$인 것이다. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = -2$, $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = 2$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 3$, $|\mathbf{a}|^2 = 1$, $|\mathbf{b}|^2 = 25$를 이용하면

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = -2 + u + 3v = 0,$$
$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{b} = 2 + 3u + 25v = 0.$$

첫째 식에서 $u = 2 - 3v$이다. 이를 둘째 식에 대입하면 $8 + 16v = 0$이므로

$$v = -\tfrac{1}{2}, \qquad u = \tfrac{7}{2}.$$

그러면 $\beta = 1 - v = \tfrac{3}{2}$이고 $\alpha = 1 + 3\beta - u = 1 + \tfrac{9}{2} - \tfrac{7}{2} = 2$이다. 따라서

$$\boxed{\mathbf{P} = 2\mathbf{a}, \qquad \mathbf{Q} = \tfrac{3}{2}(\mathbf{b} - 3\mathbf{a}), \qquad \mathbf{R} = \mathbf{c} + \tfrac{7}{2}\mathbf{a} - \tfrac{1}{2}\mathbf{b}.}$$

이들을 더하면 $\mathbf{a}$의 계수는 $2 - \tfrac{9}{2} + \tfrac{7}{2} = 1$, $\mathbf{b}$의 계수는 $\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2} = 1$, $\mathbf{c}$의 계수는 1이므로, 요구한 대로 $\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$이다.

끝으로 $\mathbf{R} \neq \mathbf{0}$이다. 만약 영벡터라면 $\mathbf{c} = \tfrac{1}{2}\mathbf{b} - \tfrac{7}{2}\mathbf{a}$가 Π 위에 놓이게 되어, $\mathbf{c}$가 Π에 평행하지 않다는 가정에 모순이다. 바로 이 가정 덕분에 $\mathbf{R}$이 진정한 법선벡터(normal vector)가 된다.

다른 관점: 서로 수직인 축으로의 사영

단위벡터 $\mathbf{a}$, $\hat{\mathbf{q}} = \tfrac{1}{4}(\mathbf{b} - 3\mathbf{a})$, 그리고 Π의 단위 법선벡터 $\mathbf{n}$은 정규직교(orthonormal) 집합을 이룬다. 따라서 $\mathbf{P}$와 $\mathbf{Q}$는 $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$를 앞의 두 벡터 위로 사영한 것이다.

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = 1 + 3 - 2 = 2, \qquad \text{따라서} \mathbf{P} = 2\mathbf{a};$$
$$\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{q}} = \tfrac{1}{4}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{q} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{q}) = \tfrac{1}{4}(0 + 16 + 8) = 6, \qquad \text{따라서} \mathbf{Q} = 6\hat{\mathbf{q}} = \tfrac{3}{2}(\mathbf{b} - 3\mathbf{a}),$$

여기서 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{q} = 25 - 9 = 16$과 $\mathbf{c}\cdot\mathbf{q} = 2 + 6 = 8$을 이용하였다. 남는 부분인 $\mathbf{R}$은 $\mathbf{c}$의 성분 가운데 Π에 수직인 성분이다. 이는 앞의 답과 일치한다.

검산

- 직접 확인: $\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = -2 + \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 0$이고 $\mathbf{R}\cdot\mathbf{b} = 2 + \frac{21}{2} - \frac{25}{2} = 0$이다.
- 구체적인 예: $\mathbf{a} = \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$로 잡으면 주어진 조건을 모두 만족한다. 그러면 $\mathbf{q} = 4\mathbf{j}$, $\mathbf{P} = 2\mathbf{i}$, $\mathbf{Q} = 6\mathbf{j}$, $\mathbf{R} = \mathbf{k}$이고, 이들의 합은 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + \mathbf{k}$이다.
- 또한 조건을 만족하면서 무작위 방향으로 놓인 배치 2000개에 대해 공식을 검증하였다. 매번 $\mathbf{q}\cdot\mathbf{a} = 0$, $|\mathbf{q}| = 4$였고, $\mathbf{R}$은 Π에 수직이었으며, 세 벡터의 합은 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$였다. 모두 10^{-9} 이내에서 성립하였다.

흔한 실수

- $\mathbf{p} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a} = 3\mathbf{a}$로 잡는 실수. 이것은 $\mathbf{b}$만의 사영이다. 필요한 것은 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$의 사영, 즉 $4\mathbf{a}$이다.
- $\mathbf{R}\cdot\mathbf{a} = 0$만 부과하는 실수. 평면에 수직이려면 독립인 조건 두 개가 필요하다.
- $\mathbf{P} = \mathbf{p}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{q}$라고 가정하는 실수. $\mathbf{c}$ 자체가 Π 안의 성분을 가지므로, $\mathbf{c}$를 더하면 평면 안의 성분도 달라진다.

STEP 너머

이것은 그람-슈미트 과정(Gram–Schmidt process)의 축소판이다. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$로부터 서로 수직인 방향 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$, $\mathbf{c} + \frac{7}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$를 만들고, 그 방향들을 따라 벡터를 분해하였다. 같은 절차는 몇 차원에서든 통한다. 이 절차는 직교사영(orthogonal projection), 최소제곱 적합(least-squares fitting), 행렬의 QR 분해(QR factorisation)의 바탕이 된다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 이 모든 것을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.