풀이

STEP II 2004, 문제 5

순수수학 • 적분방정식

> **STEP II 2004, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q5

핵심 아이디어

미지의 함수가 적분 안에 들어 있어서 처음에는 무섭게 보이지만, 덧셈정리(compound-angle formula)로 $\sin(x+t)$를 전개하면 사정이 달라진다. 그러면 t가 적분 밖으로 나오고, 적분 안에 남는 것은 두 개의 고정된 수이다. 따라서 f는 t에 $\sin t$와 $\cos t$의 일차결합을 더한 꼴이어야 하고, 문제 전체는 두 개의 일차방정식(linear equations)으로부터 두 상수를 구하는 문제로 줄어든다. 첫 번째 부분의 두 적분은 바로 그 방정식에 필요한 것들이다.

풀이

두 적분

$u = x$, $\mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$로 두고 부분적분(integration by parts)을 하면

$$\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x = \Big[-x\cos x\Big]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x\,\mathrm{d}x = (-\pi\cos\pi - 0) + \Big[\sin x\Big]_0^\pi = \pi.$$

마찬가지로 $u = x$, $\mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$로 두면

$$\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x = \Big[x\sin x\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 0 - \Big[-\cos x\Big]_0^\pi = -(1+1) = -2.$$

또한 $[0,\pi]$에서의 표준적인 적분 세 개가 필요하다.

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\pi \sin x\cos x\,\mathrm{d}x = 0.$$

처음 두 개는 $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$와 $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$에서 나오는데, $\cos 2x$를 한 주기(period) 전체에서 적분하면 0이 되기 때문이다. 세 번째는 같은 이유로 $\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2x\,\mathrm{d}x = 0$이다.

f의 꼴

$\sin(x+t) = \sin x \cos t + \cos x \sin t$로 전개한다. 적분 변수는 x이므로 $\sin t$와 $\cos t$는 상수이고 적분 밖으로 나온다.

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(t) &= t + \int_0^\pi \mathrm{f}(x)(\cos x \sin t + \sin x \cos t)\,\mathrm{d}x \\ &= t + \sin t \int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x + \cos t \int_0^\pi \mathrm{f}(x)\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= t + A\sin t + B\cos t, \end{aligned}$$

여기서 A와 B는 주어진 두 적분이다. 이들은 t에 의존하지 않으므로 진짜 상수이다. 이것이 구하려던 꼴이다.

A와 B 구하기

생각해 보기 f를 모르는데 어떻게 A와 B를 구할 수 있을까?

우리는 그 모양은 알고 있다: $\mathrm{f}(x) = x + A\sin x + B\cos x$. 이것을 다시 $(*)$에 대입하면 적분을 A와 B로 나타내어 계산할 수 있게 되고, 양변을 맞추면 이들에 대한 방정식이 나온다.

위에서 구한 $\sin(x+t)$의 전개를 이용하여 $(*)$의 우변에 대입하면

$$t + \sin t \int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\cos x\,\mathrm{d}x + \cos t \int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x.$$

앞에서 구한 적분들을 이용하면

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\cos x\,\mathrm{d}x &= -2 + A\cdot 0 + B\cdot\frac{\pi}{2} = -2 + \frac{\pi}{2}B, \\ \int_0^\pi (x + A\sin x + B\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x &= \pi + A\cdot\frac{\pi}{2} + B\cdot 0 = \pi + \frac{\pi}{2}A. \end{aligned}$$

따라서 $(*)$는 모든 t에 대하여 다음이 성립한다는 뜻이다.

$$t + A\sin t + B\cos t = t + \left(-2 + \frac{\pi}{2}B\right)\sin t + \left(\pi + \frac{\pi}{2}A\right)\cos t.$$

$\sin t$와 $\cos t$의 계수를 비교하면(이 항등식(identity)은 모든 t에 대하여 성립하므로 정당하다: $t = \frac{\pi}{2}$와 $t = 0$을 차례로 대입하면 각 계수를 따로 분리할 수 있다)

$$A = -2 + \frac{\pi}{2}B, \qquad B = \pi + \frac{\pi}{2}A.$$

두 번째 식을 첫 번째 식에 대입하면

$$A = -2 + \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{4}A \quad\Longrightarrow\quad A\left(1 - \frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^2}{2} - 2, \quad \text{즉} \quad A\cdot\frac{4-\pi^2}{4} = -\frac{4-\pi^2}{2}.$$

$\pi^2 \neq 4$이므로 $4-\pi^2$로 나눌 수 있고, $A = -2$를 얻는다. 그러면 $B = \pi + \frac{\pi}{2}(-2) = 0$이다. 따라서

$$A = -2, \qquad B = 0, \qquad \text{따라서} \qquad \mathrm{f}(t) = t - 2\sin t.$$

검산

답을 A와 B의 정의에 직접 대입하여 확인한다. $\mathrm{f}(x) = x - 2\sin x$이면

$$\int_0^\pi \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x = -2 - 2\cdot 0 = -2 = A, \qquad \int_0^\pi \mathrm{f}(x)\sin x\,\mathrm{d}x = \pi - 2\cdot\frac{\pi}{2} = 0 = B.$$

수치적으로, 심프슨 공식(Simpson's rule)을 쓰면 $\int_0^\pi x\sin x\,\mathrm{d}x \approx 3.14159$, $\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x \approx -2.00000$을 얻는다. 또한 $\mathrm{f}(t) = t - 2\sin t$로 두고 임의로 고른 t의 값 50개에서 $(*)$의 우변을 계산해 보았는데, 매번 10^{-9} 이내의 오차로 $\mathrm{f}(t)$와 일치하였다.

흔한 실수

- $\int_0^\pi x\cos x\,\mathrm{d}x$에서 음의 부호를 빠뜨리는 것: 경계항(boundary term)은 0이 되고 $-\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = -2$이다.
- 어느 적분이 $\sin t$에 곱해지는지 혼동하는 것. $\sin(x+t)$의 $\cos x\sin t$ 부분이 $A\sin t$를 만들며, 이때 $A = \int \mathrm{f}(x)\cos x\,\mathrm{d}x$이지 $\int \mathrm{f}(x)\sin x\,\mathrm{d}x$가 아니다.
- $1 - \frac{\pi^2}{4}$가 0이 아님을 언급하지 않고 그것으로 나누는 것.

STEP 너머

방정식 $(*)$는 **제2종 프레드홀름 적분방정식**(*Fredholm integral equation of the second kind*)이다. 그 핵(kernel) $\sin(x+t) = \sin x\cos t + \cos x\sin t$는 x의 함수와 t의 함수의 곱을 유한 개 더한 것("퇴화(degenerate)" 핵 또는 "분리 가능(separable)" 핵)이며, 바로 이 때문에 문제가 2×2 연립일차방정식으로 줄어든다. 조건 $\pi^2 \neq 4$는 이 연립방정식의 행렬식(determinant)이 0이 아니라는 명제이다. 만약 행렬식이 0이라면 해가 없거나 무수히 많을 수 있는데, 이것은 특이 행렬(singular matrix)의 적분방정식 버전이다. 이 뒤에 있는 선형대수(linear algebra)에 대해서는 Strang, *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.