풀이

STEP II 2004, 문제 4

순수수학 • 기하에서의 최적화

STEP II 2004, 4번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

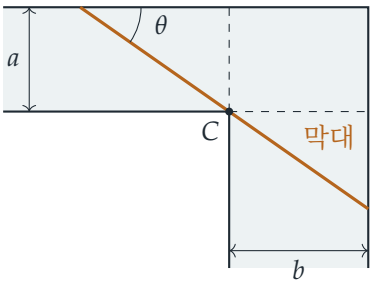
step.maths.org/questions/04-s2-q4

핵심 아이디어

어떤 경우든 막대(또는 탁자)는 한 복도를 따라 놓인 상태에서 다른 복도를 따라 놓인 상태로 돌아가야 하므로, 어느 순간에는 그 사이의 각 θ를 벽과 이루게 된다. 각을 하나로 고정하면, 가장 여유 있는 길이는 안쪽 모서리를 살짝 스치는 직선 위에 있고, 그 길이는 직각삼각형으로 쉽게 계산할 수 있다. 따라서 물체가 모퉁이를 돌 수 있으려면 그 길이가 모든 각에 대한 이 길이들 가운데 **가장 작은** 값 이하여야 하며, 그 최솟값은 미분으로 구한다.

풀이

이 풀이 전체에서 바깥 모서리를 원점에 두고, 바깥 벽을 $y = 0$(폭이 a이고 왼쪽으로 뻗은 복도)과 $x = 0$(폭이 b이고 아래쪽으로 뻗은 복도)을 따라 놓는다. 그러면 안쪽 모서리는 $C = (-b, -a)$이다.



소문항 (i)

어느 순간 막대가 a-복도의 벽과 예각 θ를 이루며, 그림처럼 바깥 벽 $y = 0$에서 바깥 벽 $x = 0$ 쪽으로 내려가며 기울어져 있다고 하자.

각 θ에서 가장 긴 선분. C를 지나고 각이 θ인 직선을 생각한다. C에서 벽 $y = 0$까지는 수직 방향으로 a만큼 올라가므로 그 부분의 길이는 $a\operatorname{cosec}\theta$이고, C에서 벽 $x = 0$까지는 수평 방향으로 b만큼 가므로 그 부분의 길이는 $b\sec\theta$이다. 따라서 이 직선에서 두 바깥 벽 사이에 놓인 현(chord)의 길이는

$$f(\theta) = a\operatorname{cosec}\theta + b\sec\theta.$$

이다. 한 복도에서 다른 복도로 이어지는, 각이 θ인 다른 직선은 모두 C의 바깥쪽을 지나야 한다(그렇지 않으면 안쪽 벽을 뚫고 지나가게 된다). 이런 직선은 두 바깥 벽과 함께 더 작은 닮은 직각삼각형을 잘라 내므로, 바깥 벽 사이의 현은 $f(\theta)$보다 짧다. 또 이 순간 막대가 완전히 a-복도 안에 있다면, 막대는 폭이 a인 띠 안에 들어가므로 $L\sin\theta \le a$이고, 따라서 $L \le a\operatorname{cosec}\theta < f(\theta)$이다. 마찬가지로 막대가 완전히 b-복도 안에 있으면 $L \le b\sec\theta < f(\theta)$이다. 어느 경우든

$$L \le f(\theta) \quad \text{막대가 거쳐 가는 모든 각 } \theta\text{에 대하여}$$

이다. 막대가 첫 번째 복도를 따라 놓인 상태에서 두 번째 복도를 따라 놓인 상태로 돌아가는 동안 θ는 0 근처에서 $\frac{1}{2}\pi$ 근처까지 연속적으로 변하므로, 그 사이의 모든 값을 지난다. 따라서 **모든** $\theta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$에 대하여 $L \le f(\theta)$이고, 곧 L은 f의 최솟값 이하이다.

f의 최소화. 미분하면

$$f'(\theta) = -\frac{a\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{b\sin\theta}{\cos^2\theta} = \frac{b\sin^3\theta - a\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}.$$

이다. 이 값은 $\tan^3\theta = a/b$일 때, 그리고 그때에만 0이 된다. $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 tan는 증가하므로 이 방정식의 해 α는 이 구간에 하나뿐이다. f'의 부호는 $b\tan^3\theta - a$의 부호와 같아서 α 앞에서는 음수, 뒤에서는 양수이므로, α에서 최솟값을 갖는다. (또한 양 끝에서 $f \to \infty$이다.) $L \le f(\theta)$에 $\theta = \alpha$를 대입하면

$$L \le a\operatorname{cosec}\alpha + b\sec\alpha, \qquad \tan^3\alpha = \frac{a}{b},$$

을 얻으며, 이것이 보이려던 것이다.

소문항 (ii)

이제 탁자의 긴 변이 막대의 역할을 한다. 안쪽 긴 변은 각이 θ인 직선 위에 있고, 바깥쪽 긴 변은 그와 평행하면서 바깥 모서리 쪽으로 거리 w만큼 더 나아간 직선 위에 있다. 바깥쪽에 있는 탁자의 두 꼭짓점은 모두 바깥 벽 안쪽에 있어야 한다.

바깥쪽 변을 따라 남는 여유. 바깥 모서리 O로부터의 거리가 d이고 각이 θ인 직선은 O에서 직각삼각형을 잘라 내는데, 이 삼각형의 빗변은 c(두 벽 사이의 현)이고, 두 직각변은 $c\cos\theta$와 $c\sin\theta$이며, O에서 내린 높이는 d이다. 넓이의 두 배는 $c\cos\theta\cdot c\sin\theta$이기도 하고 $c\,d$이기도 하므로

$$c = \frac{d}{\sin\theta\cos\theta} = 2d\operatorname{cosec}2\theta.$$

이다. 현의 길이는 O로부터의 거리에 비례한다. 따라서 직선을 (O 쪽으로) w만큼 안으로 옮기면 현의 길이는 $2w\operatorname{cosec}2\theta$만큼 줄어든다.

> **생각해 보기** 왜 바깥쪽 긴 변은 C를 지나는 직선에서 w만큼 안쪽에 있는 직선 위에서 바깥 벽 사이에 들어가야 하는가?

안쪽 긴 변은 안쪽 모서리를 가로지를 수 없으므로, C를 지나는 직선 위에 있거나 그 바깥에 있다. 그러면 바깥쪽 긴 변은 적어도 w만큼 더 바깥에 있는 직선 위에 있고, 그 현의 길이는 기껏해야 $f(\theta) - 2w\operatorname{cosec}2\theta$이다. (두 짧은 변은 바깥쪽 꼭짓점에서 긴 변에 수직으로 안쪽을 향해 뻗어 있고 복도 안에 머무르므로, 더 이상의 제약을 주지 않는다.) 반대로 탁자 전체가 a-복도 안에 있다면, 띠를 가로지르는 탁자의 높이는 $l\sin\theta + w\cos\theta \le a$이다. 이로부터 얻는 한계 $l \le (a - w\cos\theta)\operatorname{cosec}\theta$는 $w < b$이므로 아래의 $g(\theta)$보다 $(b - w\sin\theta)\sec\theta > 0$만큼 작다. b-복도의 경우도 같다. 따라서 소문항 (i)과 똑같이, 성공하려면 모든 $\theta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$에 대하여 $l \le g(\theta)$여야 한다. 여기서

$$g(\theta) = a\operatorname{cosec}\theta + b\sec\theta - 2w\operatorname{cosec}2\theta.$$

이다. (탁자는 두 복도보다 폭이 좁아야 한다. 즉 $w < a$이고 $w < b$여야 하며, 그렇지 않으면 복도를 따라 이동하는 것조차 불가능하다.)

g의 최소화. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\operatorname{cosec}2\theta = -\dfrac{2\cos2\theta}{\sin^2 2\theta}$이므로

$$g'(\theta) = -\frac{a\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{b\sin\theta}{\cos^2\theta} + \frac{4w\cos2\theta}{\sin^2 2\theta}.$$

이다. 양변에 $\sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta > 0$를 곱한다. 그러면 $g'(\theta) = 0$일 필요충분조건은

$$-a\cos^3\theta + b\sin^3\theta + w\cos2\theta = 0, \qquad \text{즉} \qquad w\cos2\theta = \cos^3\theta\,(a - b\tan^3\theta).$$

이다. $\cos2\theta = \cos^2\theta\,(1 - \tan^2\theta)$로 쓰고 $\cos^2\theta$로 나눈다. 만약 $\theta = \frac{1}{4}\pi$라면 방정식은 $0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(a - b)$가 되는데, $a \ne b$이므로 이는 불가능하다. 따라서 정류점(stationary point)에서 $\tan^2\theta \ne 1$이고, $1 - \tan^2\theta$로 나누어

$$w = \left(\frac{a - b\tan^3\theta}{1 - \tan^2\theta}\right)\cos\theta.$$

를 얻는다. $\theta \to 0^+$일 때 $w < a$이므로 $g(\theta) \approx (a - w)/\theta \to +\infty$이고, 마찬가지로 $\theta \to \frac{1}{2}\pi^-$일 때 $w < b$이므로 $g \to +\infty$이다. 따라서 연속함수 g는 구간 내부의 한 점에서

최솟값을 가지며, 그 점에서 $g' = 0$이다. 이 점을 β라 하면, β는 위의 방정식을 만족한다. $l \leq g(\theta)$에 $\theta = \beta$를 대입하면

$$l \leq a\operatorname{cosec}\beta + b\sec\beta - 2w\operatorname{cosec}2\beta,$$

를 얻으며, 이것이 보이려던 것이다. (사실 이 방정식의 **어떤** 근 β에 대해서도 $l \leq \min g \leq g(\beta)$이므로, 어느 근을 뜻하는지는 상관없다.)

검산

- 소문항 (ii)에 $w = 0$을 대입하면 $\tan^3\beta = a/b$와 소문항 (i)의 한계를 얻으며, 당연히 그래야 한다.
- 소문항 (i)에서 $\sin\alpha = a^{1/3}/\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}$이고 $\cos\alpha = b^{1/3}/\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}$이므로, 한계는 $\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}$이다. $a = 1, b = 8$이면 이 값은 $5^{3/2} \approx 11.18$이고, f의 최솟값을 수치적으로 탐색한 결과와 일치한다.
- $a \neq b$이고 $w < \min(a, b)$인 무작위 값 수백 개에 대해 g의 최솟값을 전수 탐색으로 구하고, 최솟값을 주는 각이 β에 대한 방정식을 만족함을 확인했다. 현의 길이도 좌표로부터 직접 확인했다.

흔한 실수

- f를 최소화하는 대신 최대화하는 것. 막대는 **가장 불리한** 각에서도 버텨야 하므로, 한계는 쓸 수 있는 길이의 최솟값이다.
- 탁자의 **안쪽** 변이 바깥 벽에 의해 제한된다고 생각하는 것. 바깥 모서리에 w만큼 더 가까운 직선 위에 있는 바깥쪽 변이 바로 끼이는 변이다.
- 이것이 $a \neq b$를 필요로 한다는 점을 알아채지 못한 채 $1 - \tan^2\beta$로 나누는 것.

STEP 너머

소문항 (i)은 고전적인 "모퉁이를 도는 사다리" 문제이며, 그 답 $\left(a^{2/3}+b^{2/3}\right)^{3/2}$은 성망형(astroid)과 관련이 있다. 안쪽 모서리를 지나는 직선들이 포락선(envelope)을 그리기 때문이다. 소문항 (ii)는 **움직이는 소파 문제**(*moving sofa problem*)의 작은 경우이다. 폭이 1인 직각 모퉁이를 돌아 옮길 수 있는 도형 가운데 넓이가 가장 큰 것은 어떤 모양인가? 이 문제는 1966년 Leo Moser가 제기했으며, 그 역사 대부분 동안 완전한 해결을 허락하지 않았다. 이런 정신으로 기하와 미적분이 만나는 문제를 더 보고 싶다면 Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.