풀이

STEP II 2004, 문제 3

순수수학 • 곡선 그리기

> **STEP II 2004, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q3

핵심 아이디어

모든 것은 하나의 곡선에서 나온다. C에 대해서는 도함수(derivative)를 완전히 인수분해(factorise)한다. 중근을 주는 인수 $(x-2)$는 미분한 뒤에도 남고, 나머지는 이차식이 된다. 그다음 나머지 두 곡선은 처음부터 새로 시작하지 않고 C로부터 만들어 낸다. (i)에서는 $y=\pm\sqrt{f(x)}$를 생각하고, (ii)에서는 f에 x^2을 대입한다. f가 어디에서 양수인지, 어디에서 단순근(simple root)을 갖는지, 어디에서 중근(repeated root)을 갖는지를 놓치지 말아야 한다. 이러한 세부 사항이 곡선의 모양을 결정한다.

풀이

$f(x)=x(x+1)(x-2)^4$으로 두면 C는 $y=f(x)$이다.

C의 정상점

곱의 미분법(product rule)을 쓰고 공통인수 $(x-2)^3$을 묶어 내면

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+1)(x-2)^4 + 4x(x+1)(x-2)^3 \\ &= (x-2)^3[(2x+1)(x-2)+4x^2+4x] \\ &= (x-2)^3(6x^2+x-2) \\ &= (x-2)^3(3x+2)(2x-1). \end{aligned}$$

따라서 정상점(stationary point)은 $x=-\frac{2}{3}$, $x=\frac{1}{2}$, $x=2$에 있고,

$$f(-\tfrac{2}{3}) = (-\tfrac{2}{3})(\tfrac{1}{3})(-\tfrac{8}{3})^4 = -\frac{8192}{729}, \qquad f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot(-\tfrac{3}{2})^4 = \frac{243}{64}, \qquad f(2)=0.$$

이들을 분류하기 위해 f'의 각 인수의 부호를 살펴본다.

	$x < -\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} < x < 2$	$x > 2$
$(x-2)^3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(3x+2)(2x-1)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

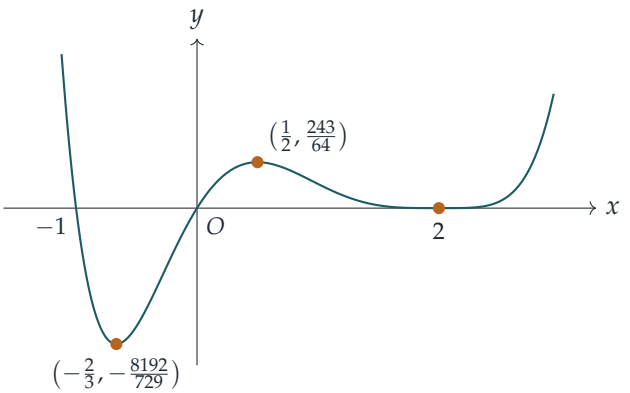
그러므로

- $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{8192}{729}\right)$은 극소점(minimum)이다($f'$의 부호가 $-$에서 $+$로 바뀐다).
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{243}{64}\right)$은 극대점(maximum)이다($f'$의 부호가 $+$에서 $-$로 바뀐다).
- $(2, 0)$은 극소점이다(f'의 부호가 $-$에서 $+$로 바뀐다).

마지막 것은 미분을 쓰지 않아도 분명하다. $x = 2$ 근처에서는 $x(x+1) > 0$이고 $(x-2)^4 \geq 0$이므로 $f(x) \geq 0$이다.

C의 개형 그리기

곡선은 $x = -1$과 $x = 0$에서 x축을 가로지르고(단순근이며, 기울기는 $f'(-1) = -81$, $f'(0) = 16$이다), $x = 2$에서 x축에 접한다. $x = 2$ 근처에서 $f(x) \approx 2 \cdot 3\,(x-2)^4 = 6(x-2)^4$이므로 곡선은 그곳에서 매우 평평하다. f는 최고차항의 계수가 양수인 6차 다항식이므로 $x \to \pm\infty$일 때 $y \to +\infty$이다. 그림에서 세로 방향의 축척은 줄여서 나타내었다.



소문항 (i)

이제 $y^2 = f(x)$이므로 $y = \pm\sqrt{f(x)}$이다. 세 가지 사실로 모양이 정해진다.

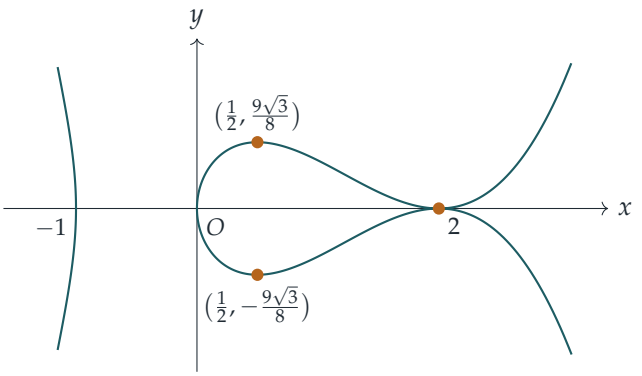
- **곡선이 존재하는 범위.** $f(x) \geq 0$이어야 하는데, C로부터 이는 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 0$임을 뜻한다. $-1 < x < 0$에서는 곡선이 없다.

- **대칭성.** y를 $-y$로 바꾸어도 방정식이 변하지 않으므로 곡선은 x축에 대하여 대칭(symmetric)이다. 따라서 위쪽 절반 $y = \sqrt{f(x)} = (x-2)^2\sqrt{x(x+1)}$만 그린 다음 대칭이동하면 충분하다.
- **정상점.** $f > 0$일 때 $y = \sqrt{f}$에 대하여 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = f'/(2\sqrt{f})$이므로, 위쪽 절반은 정확히 $f' = 0$이고 $f > 0$인 곳에서 정상점을 갖는다. 그러한 곳은 $x = \frac{1}{2}$뿐이고(점 $x = -\frac{2}{3}$은 정의역 밖에 있다), 위쪽 절반에서는 $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{243/64}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$에서 극대, 아래쪽 절반에서는 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{9\sqrt{3}}{8}\right)$에서 극소가 된다.

> **?** **생각해 보기** $f = 0$인 점 $(-1,0)$, $(0,0)$, $(2,0)$에서는 어떤 일이 일어나는가?

$x = 0$과 같은 **단순**근에서는 $f(x) \approx 16x$이므로 원점 근처에서 $y^2 \approx 16x$이다. 이는 옆으로 누운 포물선이고, 곡선은 **수직** 접선(vertical tangent)을 가지며 축을 가로지른다. $y^2 \approx 81(-1-x)$인 $x = -1$에서도 마찬가지이다. **중**근 $x = 2$에서는 $y^2 \approx 6(x-2)^4$이므로 $y \approx \pm\sqrt{6}\,(x-2)^2$이다. 즉 축의 위와 아래에 하나씩 포물선과 비슷한 두 호가 있고, 둘 다 $(2,0)$에서 x축에 접한다. 따라서 위쪽 절반과 아래쪽 절반은 그곳에서 공통의 수평 접선을 가지며 만난다. $(2,0)$에서 위쪽 절반은 극소, 아래쪽 절반은 극대를 갖는다.

$|x|$가 클 때 $y \approx \pm|x|^3$이다. 따라서 곡선은 $(0,0)$에서 $(2,0)$까지 이어지는 닫힌 고리이고, $(2,0)$에서 잘록하게 조여진 뒤 오른쪽으로 벌어지는 두 가지로 이어진다. 이와 함께 $(-1,0)$을 지나며 왼쪽으로 벌어지는 별개의 조각이 있다.



소문항 (ii)

여기서는 $y = x^2(x^2+1)(x^2-2)^4 = f(x^2)$이다. 두 가지 관찰로 대부분의 일이 해결된다.

- x가 x^2의 꼴로만 나타나므로 곡선은 y축에 대하여 대칭이다.
- x가 $[0,\infty)$를 움직일 때 $u = x^2$은 증가하면서 $[0,\infty)$를 움직이므로, $x \geq 0$에서 곡선은 C의 $x \geq 0$인 부분을 다시 매개변수화(re-parametrise)한 것이다. 특히 모든 곳에서 $y \geq 0$이고, x가 음수인 C의 부분(그 극소점을 포함하여)은 전혀 관여하지 않는다.

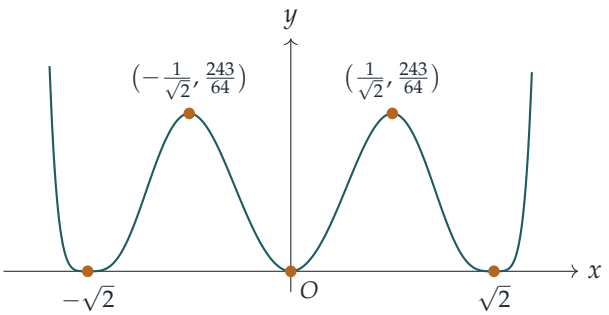
연쇄법칙(chain rule)에 의하여

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x\,f'(x^2) = 2x\,(x^2-2)^3(3x^2+2)(2x^2-1),$$

이고, 이는 $x = 0$, $x^2 = \frac{1}{2}$ 또는 $x^2 = 2$일 때 0이 된다(인수 $3x^2+2$는 결코 0이 아니다). $u \geq 0$에서 f는 0에서 출발하여 $u = \frac{1}{2}$에서 최댓값까지 증가하고, $u = 2$에서 0까지 감소한 다음 그 뒤로는 계속 증가한다. 그리고 $x \geq 0$에서 $u = x^2$은 이 순서를 보존한다. 따라서 정상점은 다음과 같다.

- $(0,0)$에서 극소이며, 이곳에서 $y \approx 16x^2$이다.
- $(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{243}{64})$에서 극대이다.
- $(\pm\sqrt{2}, 0)$에서 극소이며, 이곳에서 곡선은 축에 매우 평평하게 접한다. 즉 $y \approx 384\,(x \mp \sqrt{2})^4$이다.

$|x|$가 클 때 $y \approx x^{12}$이므로 곡선은 매우 가파르게 올라간다.



검산

도함수를 간단히 확인해 보자. $x = 0$에서 $f(x) = x(x+1)(x-2)^4 \approx 16x$이고, 실제로 $f'(0) = (-8)(2)(-1) = 16$이다. 수치 계산으로 확인하면, 임의의 점들에서 f'의 인수분해가 유한 차분(finite difference)으로 구한 도함수와 일치하고, $f(-\frac{2}{3}) \approx -11.237$, $f(\frac{1}{2}) = 3.796875$이며, $[0,2]$에서 $\sqrt{f}$의 최댓값은 $x = 0.5$에서 $1.94856\ldots = \frac{9\sqrt{3}}{8}$이다. (ii)에서는 예측한 대로 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$의 부호가 $x \approx \pm 0.707$과 ± 1.414에서(그리고 0에서) 바뀐다.

흔한 실수

- 미분하기 전에 f를 전개하는 것. 그러면 f'은 인수가 보이지 않는 오차식이 된다. $(x-2)^3$을 밖으로 묶어 두면 이차식 하나만 풀면 된다.

- (i)에서 $(0,0)$과 $(-1,0)$에 첨점(cusp)이나 꺾인 점을 그리는 것. f의 단순근에서 $y^2 = f(x)$의 접선은 수직이다.
- (ii)에서 $x = -\frac{2}{3}$에 있는 C의 극소점을 그대로 옮겨 그리는 것. $x^2 \geq 0$이므로 C의 $x \geq 0$인 부분만 쓰이며, y는 결코 음수가 아니다.

STEP 너머

f의 근 근처에서 $y^2 = f(x)$가 보이는 행동은 대수곡선(algebraic curve)의 특이점(singular point) 연구의 출발점이다. 단순근은 수직 접선을 갖는 매끄러운 점을 주고, 중근은 $(2,0)$에서처럼 두 가지가 만나는 곳을 준다. f가 삼차식일 때 곡선 $y^2 = f(x)$는 **타원곡선**(*elliptic curve*)이며, 현대 정수론의 중심에 있다. 곡선의 개형 그리기의 바탕이 되는 미적분(단조성, 도함수의 부호, 연쇄법칙)을 엄밀하게 다룬 책으로는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.