풀이

STEP II 2004, 문제 2

순수수학 • 이차부등식

STEP II 2004, 2번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s2-q2

핵심 아이디어

까다로운 부분은 절댓값(modulus) 하나뿐이며, $t = |x|$로 놓으면 이것이 사라진다. $x^2 = |x|^2$이므로 주어진 부등식은 $t \geq 0$이라는 조건이 덧붙은 t에 대한 평범한 이차부등식(quadratic inequality)이 된다. 그다음에는 완전제곱식으로 고치기(completing the square)나 판별식(discriminant)을 살펴보는 것만으로 모든 것을 알 수 있다. 허용되는 t의 구간 하나마다 원점의 양쪽에 하나씩, x의 구간이 두 개 생긴다.

풀이

풀이 전체에서 $t = |x| \geq 0$으로 놓는다. $x^2 = t^2$이므로 부등식 $(*)$는 정확히 다음과 같다.

$$q(t) = t^2 - \alpha t + 2 < 0, \qquad t = |x| \geq 0.$$

$|\alpha| < 2\sqrt{2}$일 때 해가 없음

완전제곱식으로 고치면

$$q(t) = \left(t - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + 2 - \frac{\alpha^2}{4}.$$

$|\alpha| < 2\sqrt{2}$이면 $\alpha^2 < 8$이므로 $2 - \frac{\alpha^2}{4} > 0$이다. 제곱항은 결코 음수가 아니므로 모든 실수 t에 대하여 $q(t) > 0$이고, 특히 $t = |x|$일 때도 그렇다. 따라서 모든 x에 대하여 $x^2 - \alpha|x| + 2 > 0$이고, $(*)$를 만족하는 x의 값은 없다.

$\alpha = 3$인 경우

이제 $q(t) = t^2 - 3t + 2 = (t-1)(t-2)$이고, 이것은 정확히 $1 < t < 2$일 때 음수이다. 그러므로 $(*)$는 $1 < |x| < 2$일 때, 그리고 그때에만 성립하며, 해집합은 다음과 같다.

$$\{x : -2 < x < -1\} \cup \{x : 1 < x < 2\}.$$

길이의 합 S

$\alpha > 2\sqrt{2}$라 하자. 그러면 $\alpha^2 > 8$이므로 q는 서로 다른 두 실근

$$t_1 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 8}}{2}, \qquad t_2 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 8}}{2},$$

를 가지며, q의 최고차항 계수(leading coefficient)가 양수이므로 $q(t) < 0$인 것은 정확히 $t_1 < t < t_2$일 때이다.

? **생각해 보기** 구간 $t_1 < t < t_2$의 일부가 음수인 t에 걸쳐 있을까 봐 걱정해야 할까?

그럴 필요 없다. 두 근의 곱은 $t_1 t_2 = 2 > 0$이고 합은 $t_1 + t_2 = \alpha > 0$이므로 두 근은 모두 양수이다. 따라서 구간 (t_1, t_2) 전체가 $t > 0$에 놓이고, 그 안의 모든 t 값은 실제로 $|x|$가 가질 수 있는 값이다.

그러므로 $(*)$는 $t_1 < |x| < t_2$일 때, 그리고 그때에만 성립한다. 즉

$$-t_2 < x < -t_1 \qquad \text{또는} \qquad t_1 < x < t_2.$$

이 두 구간은 ($t_1 > 0$이므로) 서로소(disjoint)이고, 각각의 길이는 $t_2 - t_1 = \sqrt{\alpha^2 - 8}$이다. 따라서

$$S = 2\sqrt{\alpha^2 - 8}.$$

$\alpha^2 - 8 < \alpha^2$이고 $\alpha > 0$이므로, 양의 제곱근을 취하면 $\sqrt{\alpha^2 - 8} < \alpha$이고, 따라서

$$S < 2\alpha,$$

이다. 이것으로 증명이 끝난다.

α에 대한 S의 그래프

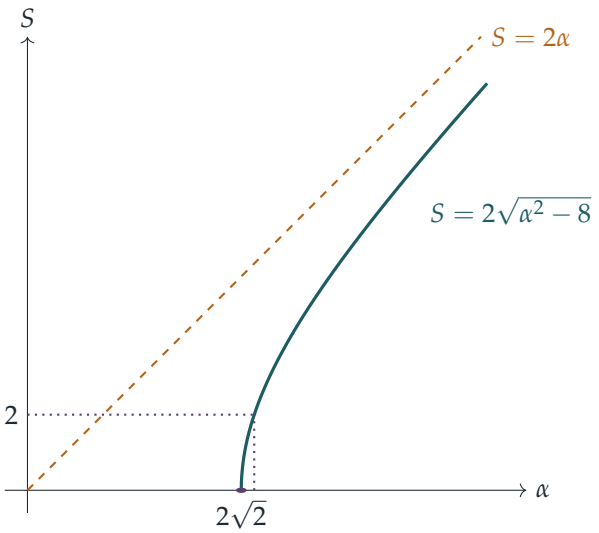
함수 $S = 2\sqrt{\alpha^2 - 8}$은 $\alpha > 2\sqrt{2}$에서 정의된다($\alpha \le 2\sqrt{2}$이면 구간이 아예 없다. $\alpha = 2\sqrt{2}$이면 $q(t) = (t - \sqrt{2})^2 \ge 0$이고, $\alpha \le 0$이면 언제나 모든 $t \ge 0$에 대하여 $q(t) \ge 2$이기 때문이다). 주요 특징은 다음과 같다.

- $\alpha \to 2\sqrt{2}^{+}$일 때 $S \to 0$이고, $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\alpha} = \dfrac{2\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 8}}$은 그 점에서 무한대로 발산한다. 즉 곡선은 점 $(2\sqrt{2}, 0)$에서 수직 접선(vertical tangent)을 가지며 시작한다.

- S는 증가하고, $\dfrac{\mathrm{d}^2S}{\mathrm{d}\alpha^2} = -\dfrac{16}{(\alpha^2-8)^{3/2}} < 0$이므로 곡선은 위로 볼록(concave)하다.
- 직선 $S = 2\alpha$는 점근선(asymptote)이며, 곡선은 아래쪽에서 이 직선에 다가간다. $(2\alpha - S)(2\alpha + S) = 4\alpha^2 - 4(\alpha^2 - 8) = 32$이므로

$$2\alpha - S = \frac{32}{2\alpha + S} \to 0 \quad \text{단, } \alpha \to \infty.$$

사실 $\frac{\alpha^2}{8} - \frac{S^2}{32} = 1$이므로, 이 그래프는 점근선이 $S = 2\alpha$인 쌍곡선(hyperbola)의 4분의 1이다.



검산

- $\alpha = 3$일 때 공식은 $S = 2\sqrt{1} = 2$를 주며, 이는 길이가 각각 1인 두 구간 $(-2,-1)$과 $(1,2)$에 들어맞는다(그래프에서 $\alpha = 3$에 점선으로 표시한 점).
- $\alpha = 5$일 때 $S = 2\sqrt{17} \approx 8.246$이다. $[-20,20]$에서 $x^2 - 5|x| + 2 < 0$인 x의 집합을 수치적으로 재어 보면 같은 값이 나오며, 이는 $2\alpha = 10$보다 넉넉히 작다.
- α가 클 때 $2\alpha - S \approx 8/\alpha$이다. $\alpha = 100$일 때 그 차는 $0.0800\ldots$이다.

흔한 실수

- $|x|$의 구간 하나마다 x의 구간이 두 개 생긴다는 것을 잊어서 $S = \sqrt{\alpha^2 - 8}$을 얻는 실수.
- $\alpha = 3$일 때의 답을 $1 < x < 2$만으로 적어서 음수 쪽 절반을 놓치는 실수.

- t에 대한 두 근이 모두 양수임을 확인하지 않고 판별식만 사용하는 실수. $\alpha < 0$이면 판별식 조건은 같아도 근이 음수이므로 해가 전혀 없다.

STEP 너머

함수 $x \mapsto x^2 - \alpha|x| + 2$는 우함수(even function)이므로 해집합은 대칭이고, 길이 S는 이 함수가 음수가 되는 집합의 **측도**(measure)이다. 부등식으로 정의된 집합의 크기를 재는 일은 측도론(measure theory)과 르베그(Lebesgue) 적분의 출발점이며, 대학 2학년 해석학(analysis)에서 배운다. 여기서 쓴 극한, 도함수, 부등식을 엄밀하게 다룬 내용은 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 읽어 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.