풀이

# STEP II 2004, 문제 11

역학 • 일률과 저항

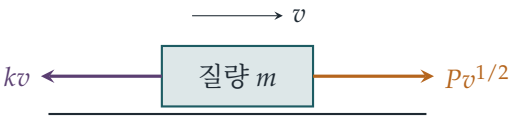
> **STEP II 2004, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q11

## 핵심 아이디어

일률(power)은 힘과 속력의 곱이므로, 최대 일률 $Pv^{3/2}$로 작동하는 엔진은 $Pv^{1/2}$의 힘으로 기차를 민다. 그러면 뉴턴의 제2법칙(Newton's second law)으로부터 $\sqrt{v}$가 들어 있는 미분방정식(differential equation)을 얻고, 치환(substitution) $u = \sqrt{v}$를 하면 이것이 바로 풀 수 있는 선형 1계 미분방정식(linear first-order equation)이 된다. 엔진을 끈 뒤에는 각 기차의 속력이 지수적으로 감소(exponential decay)하며, 소문항 (iii)의 요령은 두 감소율을 비교하는 것이다.

## 풀이

각 기차를 곧고 수평인 선로를 따라 움직이는 질점(particle)으로 모형화한다. 엔진이 최대 일률로 작동하는 동안 선로 방향으로 작용하는 힘은 구동력(driving force)과 저항(resistance) $kv$이다.




엔진이 속력 $v$에서 일률 $H$를 낸다면 구동력은 $H/v$이다. 따라서 최대 일률일 때 $A$에 작용하는 구동력은 $Pv^{3/2}/v = Pv^{1/2}$이고, $B$에 작용하는 구동력은 $2Pv^{1/2}$이다.

**소문항 (i)**

$A$에 대하여 선로 방향으로 뉴턴의 제2법칙을 쓰면

$$m\frac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t} = Pv_A^{1/2} - kv_A.$$

$u = v_A^{1/2}$로 두면 $v_A = u^2$이고 $\dfrac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t} = 2u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$이다. 그러면

$$2mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = Pu - ku^2, \qquad \text{따라서} \qquad 2m\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = P - ku,$$

이다. 여기서 $u$로 나누었는데, 기차는 항상 움직이고 있으므로($u > 0$) 이는 허용된다. 이 방정식은 선형이다(그리고 변수분리형(separable)이기도 하다):

$$\int \frac{2m\,\mathrm{d}u}{P - ku} = \int \mathrm{d}t \quad \Longrightarrow \quad -\frac{2m}{k}\ln(P - ku) = t + \text{상수},$$

따라서 어떤 상수 $C$에 대하여 $P - ku = C\mathrm{e}^{-kt/2m}$이다. ($u$가 아주 작은 처음 순간에는 $P - ku > 0$이고, 해가 평형(equilibrium) $u = P/k$에 결코 도달하지 않으므로 계속 양수로 남는다.)

> **생각해 보기** "매우 낮은 속력으로 기어가듯 움직이고 있다"는 말은 무엇을 알려 주는가?

이것은 초기 조건(initial condition)을 준다. $t = 0$에서의 속력은 양수이지만(그러므로 $u$로 나눈 것은 문제가 없다) 무시할 수 있을 만큼 작으므로, $t = 0$에서 $u = 0$으로 둔다. 그러면 $C = P$이고,

$$u = \frac{P}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-kt/2m}\right), \qquad \text{따라서} \qquad v_A = \frac{P^2\left(1 - \mathrm{e}^{-kt/2m}\right)^2}{k^2},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. (기차가 정확히 정지해 있다면 구동력이 전혀 없으므로 $v \equiv 0$도 원래 방정식을 만족한다. 문제에서 기차들이 이미 천천히 움직이고 있다고 한 것은 이 때문이다.)

$B$에 대한 방정식은 $2m\dfrac{\mathrm{d}v_B}{\mathrm{d}t} = 2Pv_B^{1/2} - kv_B$이다. 같은 치환을 하면 $4m\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2P - ku$를 얻는데, 이것은 $A$에 대한 방정식에서 $P$를 $2P$로, $m$을 $2m$으로 바꾼 것이다. 따라서

$$v_B = \frac{4P^2\left(1 - \mathrm{e}^{-kt/4m}\right)^2}{k^2}.$$

**소문항 (ii)**

두 속력이 모두 양수이므로 $9v_A = 4v_B$는 $3\sqrt{v_A} = 2\sqrt{v_B}$와 동치이다. $x = \mathrm{e}^{-kt/4m}$으로 두면 $\mathrm{e}^{-kt/2m} = x^2$이고, $t > 0$일 때 $0 < x < 1$이다. 조건은 다음과 같이 된다.

$$\frac{3P}{k}\left(1 - x^2\right) = \frac{4P}{k}(1 - x) \quad \Longrightarrow \quad 3(1 - x)(1 + x) = 4(1 - x).$$

$x \neq 1$이므로 $1-x$로 나눌 수 있고, $3+3x=4$에서 $x=\frac{1}{3}$(즉 $t=\frac{4m}{k}\ln 3$)이다. 그러면 $1-x^2=\frac{8}{9}$이고 $1-x=\frac{2}{3}$이므로

$$v_A=\frac{64P^2}{81k^2},\qquad v_B=\frac{16P^2}{9k^2}.$$

간단히 확인해 보면 $9v_A=\frac{64P^2}{9k^2}=4v_B$이다.

#### 소문항 (iii)

엔진을 끈 순간부터 시간 $\tau$를 재고, 그 순간의 속력을 $V_A=\frac{64P^2}{81k^2}$, $V_B=\frac{16P^2}{9k^2}$라 하자. 이제는 저항만 작용한다:

$$m\frac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}\tau}=-kv_A,\qquad 2m\frac{\mathrm{d}v_B}{\mathrm{d}\tau}=-kv_B,$$

따라서

$$v_A=V_A\,\mathrm{e}^{-k\tau/m},\qquad v_B=V_B\,\mathrm{e}^{-k\tau/2m}.$$

더 무거운 기차 $B$는 절반의 지수적 비율로 속력을 잃으므로, $v_B$를 제곱하면 지수가 맞추어진다:

$$v_B^2=V_B^2\,\mathrm{e}^{-k\tau/m}=\frac{V_B^2}{V_A}\,v_A.$$

마지막으로

$$\frac{V_B^2}{V_A}=\frac{256P^4}{81k^4}\cdot\frac{81k^2}{64P^2}=\frac{4P^2}{k^2},$$

이므로 $v_B^2=\dfrac{4P^2}{k^2}v_A$, 즉 이후의 모든 시각에서 $k^2v_B^2=4P^2v_A$이다. 이로써 원하는 결과를 얻는다.

## 검산

- $t\to\infty$일 때 $v_A\to P^2/k^2$이며, 이는 구동력 $Pv^{1/2}$가 저항 $kv$와 같아지는 속력이다. 마찬가지로 $v_B\to 4P^2/k^2$이며, 여기서 $2Pv^{1/2}=kv$이다.
- $t$가 작을 때 $v_A\approx P^2t^2/(4m^2)$이고 $v_B\approx P^2t^2/(4m^2)$이다. 즉 두 기차는 함께 출발하는데, 각각 단위 질량당 구동력이 $Pv^{1/2}/m$이므로 당연히 그래야 한다.
- $m=1.7$, $P=2.3$, $k=0.9$로 두고 아주 작은 초기 속력에서 시작하여 두 운동 방정식을 수치적으로(룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법으로) 계산했더니, 소문항 (i)의 공식과 약 $10^{-5}$ 이내로 일치했다. $9v_A=4v_B$인 순간에는 $\mathrm{e}^{-kt/4m}=0.33333$, $v_A=5.1602$, $v_B=11.6104$를 얻었고, 엔진을 끈 채로 계속 계산했을 때 $k^2v_B^2$는 $4P^2v_A$와 계속 같았다(예를 들어 2초 뒤에 둘 다 37.8739였다).

## 흔한 실수

- $Pv^{3/2}$를 힘으로 사용하는 것. 이것은 일률이며, 힘은 일률을 속력으로 나눈 것이다.
- 소문항 (ii)의 조건이 $x = \mathrm{e}^{-kt/4m}$에 대한 이차방정식(quadratic equation)이고, $x = \frac{1}{3}$ 외에 근(root) $x = 1$(즉 두 속력이 모두 0인 $t = 0$)도 가진다는 사실을 잊는 것.

## STEP 너머

치환 $u = \sqrt{v}$는 베르누이(Bernoulli) 방정식 $y' + p(t)y = q(t)y^n$을 푸는 방법의 특수한 경우인데, 이 방정식에서는 $u = y^{1-n}$으로 두면 항상 선형 방정식이 된다. 정확히 정지해 있는 기차에 대한 언급은 유일성 이론(uniqueness theory)을 처음 엿보게 해 준다. $\sqrt{v}$는 $v = 0$에서 기울기가 무한대이므로, 이 방정식은 $v = 0$에서 출발하는 해를 둘 이상 가지며, 이는 피카르–린델뢰프 정리(Picard–Lindelöf theorem)로 설명된다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)가 두 주제를 모두 다룬다. 일률과 저항의 역학에 대해서는 Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.