풀이

STEP II 2004, 문제 10

역학 • 경사면 위의 마찰

STEP II 2004, 10번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/04-s2-q10

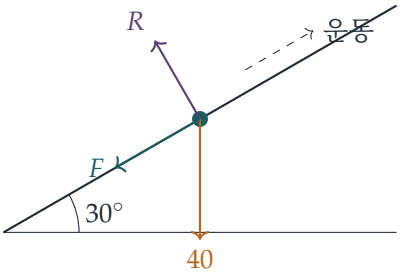
핵심 아이디어

마찰(friction)은 언제나 운동을 방해하므로, 평면을 따라 올라가며 미끄러지는 입자와 내려가며 미끄러지는 입자의 가속도는 서로 다르다. 먼저 두 가속도를 구한다. 수치가 매우 깔끔하게 나오도록 골라져 있다. 그러면 P는 올라가다가 멈추고, 다시 내려와서 아직 올라가는 중인 Q와 만난다. 두 위치를 모두 "최고점으로부터 아래쪽으로 잰 거리"로 쓰면 충돌(collision) 방정식이 제곱의 차(difference of two squares) 꼴이 된다.

(인쇄된 시험지의 소문항 (i)에는 오타가 있다. 충돌 시각에 나오는 "b"는 T여야 한다.)

풀이

각 입자를 거친 평면(rough plane) 위의 입자로 모형화하고, 위치 x는 A에서 ℓ을 따라 위쪽으로 재며, 비탈을 올라가는 방향을 양의 방향으로 잡는다.



평면에 수직인 방향으로는 가속도가 없으므로 수직항력(normal reaction)은

$$R = 4 \cdot 10 \cos 30^\circ = 20\sqrt{3}\ \text{N},$$

이고, 각 입자는 미끄러지고 있으므로 마찰은 한계 마찰(limiting friction)이다.

$$F = \mu R = \frac{1}{5\sqrt{3}} \cdot 20\sqrt{3} = 4\,\mathrm{N}.$$

비탈 아래 방향의 무게 성분은 $40\sin 30^\circ = 20\,\mathrm{N}$이다.

올라갈 때: 마찰은 비탈 아래 방향으로 작용하므로 $4a = -(20+4)$이고, 감속도(deceleration)는 $6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$이다.

내려갈 때: 마찰은 비탈 위 방향으로 작용하므로 비탈 아래 방향의 가속도는 $(20-4)/4 = 4\,\mathrm{m\,s^{-2}}$이다.

$20 > 4$이므로, 정지한 입자는 정지 상태로 머물지 않는다. 한계 마찰로는 입자를 붙잡아 둘 수 없으므로 입자는 다시 미끄러져 내려온다.

소문항 (i)

P의 운동. 올라갈 때 $v = 6 - 6t$이므로 P는 $t = 1$에서 멈추며, 그동안 $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 = 3\,\mathrm{m}$를 이동한다. $0 \le t \le 1$에서 $x_P = 6t - 3t^2 = 3 - 3(1-t)^2$이다. 그 뒤 P는 $x = 3$에서 정지 상태로부터 가속도 4로 미끄러져 내려오므로

$$x_P = 3 - 2(t-1)^2 \qquad (t \ge 1),$$

이고, 이 식은 P가 A로 돌아올 때까지, 즉 $2(t-1)^2 = 3$이 되는 $t = 1 + \sqrt{3/2}$까지 성립한다.

Q의 운동. T만큼 평행이동한 것만 빼면 똑같은 운동이다. $u = t - T$라 하면

$$x_Q = 6u - 3u^2 = 3 - 3(1-u)^2 \qquad (0 \le u \le 1).$$

생각해 보기 둘 다 아직 올라가는 동안에 충돌할 수 있을까?

그럴 수 없다. 둘 다 올라가는 동안 Q는 P가 T초 전에 지나간 경로를 그대로 따라가고, 그 경로를 따라 x는 증가하므로 P가 항상 앞서 있다. 따라서 둘은 P가 방향을 바꾼 뒤, 즉 $t \ge 1$에서만 만날 수 있다. 또한 Q가 먼저 자신의 최고점($u = 1$일 때 $x = 3$)에 도달할 수도 없다. 그때에는 P가 이미 $x = 3$을 떠나 그 아래에 있기 때문이다. 그러므로 충돌하는 순간 P는 내려가는 중이고 Q는 올라가는 중이다.

충돌. P가 방향을 바꾼 뒤 흐른 시간을 $\tau = t - 1 \ge 0$이라 하자. 그러면 $1 - u = 1 - (t - T) = T - \tau$이고, $x_P = x_Q$에서

$$2\tau^2 = 3(T-\tau)^2.$$

τ와 $T - \tau = 1 - u$는 모두 음이 아니므로(뒤의 것은 Q가 아직 올라가는 중이기 때문이다)

양의 제곱근을 취할 수 있다.

$$\sqrt{2}\,\tau = \sqrt{3}\,(T-\tau)$$
$$\tau = \frac{\sqrt{3}\,T}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})\,T = (3-\sqrt{6})\,T,$$

여기서 $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = 1$을 이용하여 분모를 유리화(rationalising)하였다. 따라서 충돌은 P를 쏘아 올린 뒤

$$t = (3-\sqrt{6})\,T + 1$$

초에 일어나며, 이것이 구하는 결과이다.

이제 T에 대한 조건이 어디에 쓰이는지 확인하면 된다. 이 시각은 P가 A로 돌아오기 전이어야 하므로 $\tau < \sqrt{3/2}$이어야 한다.

$$(3-\sqrt{6})\,T < \sqrt{\tfrac{3}{2}} \iff T < \frac{\sqrt{3/2}\,(3+\sqrt{6})}{3} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} + \tfrac{\sqrt{9}}{3} = 1+\sqrt{\tfrac{3}{2}},$$

여기서 $\sqrt{3/2}\cdot\sqrt{6} = 3$을 이용하였다. 이것이 바로 주어진 조건이다. (같은 부등식은 $t \geq T$, 즉 Q가 이미 쏘아 올려졌다는 것도 보장한다. $(3-\sqrt{6})T + 1 \geq T \iff T \leq 1/(\sqrt{6}-2) = 1+\sqrt{3/2}$이기 때문이다.)

소문항 (ii)

$T = 1+\sqrt{2/3}$이면

$$\tau = (3-\sqrt{6})\left(1+\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right) = 3-\sqrt{6}+3\sqrt{\tfrac{2}{3}}-\sqrt{6}\sqrt{\tfrac{2}{3}} = 3-\sqrt{6}+\sqrt{6}-2 = 1,$$

이므로 충돌은 $t = 2$에서 일어난다. 이 T의 값은 $1+\sqrt{3/2}$보다 작으므로 소문항 (i)의 결과를 적용할 수 있다.

마찰력의 크기는 4 N으로 일정하고 언제나 운동을 방해하므로, 마찰로 잃은 에너지는 마찰력에 미끄러진 총거리를 곱한 값이다.

- P는 위로 3 m, 그다음 아래로 $2\tau^2 = 2$ m 미끄러졌으므로 모두 5 m이다.
- Q는 방향을 바꾸지 않았고 P와 같은 지점, 즉 $x = 3-2 = 1$에 있으므로 1 m 미끄러졌다.

따라서 잃은 에너지는

$$4\times(5+1) = 24\,\text{J}.$$

검산

에너지 수지를 따져 보면 이 결과가 확인된다. 처음 운동에너지(kinetic energy)는 $2\times\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6^2 = 144$ J이다. $t = 2$에서 P의 속력은 $4\times 1 = 4$(운동에너지 32 J)이고, Q는

$u = 1 - \sqrt{2/3}$이고 속력이 $6(1-u) = 6\sqrt{2/3}$이므로 $v^2 = 24$(운동에너지 48 J)이다. 둘 다 비탈을 따라 1 m 위, 즉 $\frac{1}{2}$ m 더 높은 곳에 있으므로 위치에너지(potential energy)는 $2 \times 4 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 40$ J 증가하였다. 그리고 $144 - 32 - 48 - 40 = 24$ J이다. 무작위로 고른 $T < 1 + \sqrt{3/2}$에 대하여 두 입자를 단계별로 수치 시뮬레이션해 보았더니 충돌 시각이 $(3-\sqrt{6})T + 1$과 일치하였고(예를 들어 $T \approx 1.816$일 때 ≈ 2.000), 마찰로 잃은 에너지는 24.000 J이었다.

흔한 실수

- P가 내려갈 때에도 올라갈 때와 같은 가속도를 쓰는 실수. 마찰의 방향이 반대가 되므로 가속도는 6이 아니라 4이다.
- Q에 작용하는 마찰을 빠뜨리는 실수. Q도 미끄러지고 있었으며, Q의 1 m가 4 J를 보탠다.
- $2\tau^2 = 3(T-\tau)^2$에서 제곱근의 부호를 잘못 택하는 실수. 부호는 $\tau \geq 0$과 $T - \tau \geq 0$으로 정해진다.

STEP 너머

마찰은 비보존력(non-conservative force)의 가장 간단한 예이다. 마찰이 하는 일은 양 끝점뿐 아니라 경로에 따라 달라지며, 그래서 변위가 아니라 미끄러진 총거리가 필요했던 것이다. 어떤 계에서는 역학적 에너지가 보존되고 어떤 계에서는 보존되지 않는 까닭이 여기에 있으며, 이 생각은 대학 1학년 역학 강의에서 선적분(line integral)과 퍼텐셜(potential)을 써서 엄밀하게 다듬어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 일, 보존력, 마찰을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.