풀이

STEP II 2004, 문제 1

순수수학 • 무리식이 있는 방정식

> **STEP II 2004, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s2-q1

핵심 아이디어

모든 방정식에 $\sqrt{x}$와 $\sqrt{3x^2+1}$이 들어 있으므로, $t=\sqrt{x}$ $(t\geq 0)$로 놓아 첫 번째 근호를 다항식으로 바꾼다. 그다음 남은 제곱근을 한쪽으로 분리하고 한 번 제곱한다. 그 결과는 t에 대한 사차방정식(quartic)이 되는데, $t=0$과 $t=1$이 항상 근이므로 쉽게 인수분해된다. 진짜 작업은 마지막에 있다. 제곱하면 거짓 근(false root)이 생길 수 있으므로, 제곱한 쪽이 음수가 아닌 근만 남긴다.

풀이

세 방정식 모두 $\sqrt{x}$가 실수이려면 $x\geq 0$이어야 하므로, $t\geq 0$인 t에 대해 $x=t^2$으로 쓴다. 그러면 $\sqrt{x}=t$이고 $3x^2+1=3t^4+1$이다.

제곱하는 단계는 한 방향으로만 성립한다. 실수 A, B에 대하여

$$\sqrt{A}=B \iff A=B^2 \text{ 이고} B\geq 0.$$

따라서 제곱한 뒤에는 각 근에서 우변이 음수가 아닌지 확인해야 한다.

소문항 (i)

근호를 분리하면

$$\sqrt{3t^4+1}=2t^2-t+1.$$

우변은 항상 양수이다. 판별식(discriminant)이 $1-8<0$이고 최고차항의 계수가 양수이기 때문이다. 따라서 여기서는 제곱해도 잃는 것이 없으며, 제곱한 방정식의 모든 근이 실제

해이다. 제곱하면

$$3t^4+1=(2t^2-t+1)^2=4t^4-4t^3+5t^2-2t+1,$$
$$0=t^4-4t^3+5t^2-2t=t\,(t^3-4t^2+5t-2).$$

삼차식은 $t=1$에서 0이 되고 ($1-4+5-2=0$이므로), 인수 $t-1$로 나누면

$$t^3-4t^2+5t-2=(t-1)(t^2-3t+2)=(t-1)^2(t-2).$$

따라서 $t\,(t-1)^2(t-2)=0$이고, $t=0,1,2$이다. 세 값 모두 음수가 아니므로

$$x=0,\quad x=1,\quad x=4.$$

검산으로, $x=4$일 때 $\sqrt{49}+2-8-1=0$이다.

소문항 (ii)

이번에는

$$\sqrt{3t^4+1}=-t^2+2t+1.$$

제곱하면

$$3t^4+1=(-t^2+2t+1)^2=t^4-4t^3+2t^2+4t+1,$$
$$0=2t^4+4t^3-2t^2-4t=2t\,(t^3+2t^2-t-2).$$

삼차식의 항을 $t^2(t+2)-(t+2)$로 묶으면

$$2t\,(t+2)(t-1)(t+1)=0.$$

$t\geq 0$이므로 $t=0$과 $t=1$만 남는다. 이때 우변 $-t^2+2t+1$의 값은 각각 1과 2로 모두 양수이므로, 두 근 모두 실제 해이다.

$$x=0,\quad x=1.$$

소문항 (iii)

이번에는

$$\sqrt{3t^4+1}=t^2+2t-1.$$

제곱하면

$$3t^4+1=(t^2+2t-1)^2=t^4+4t^3+2t^2-4t+1,$$
$$0=2t^4-4t^3-2t^2+4t=2t\,(t^3-2t^2-t+2).$$

삼차식을 $t^2(t-2)-(t-2)$로 묶으면

$$2t\,(t-2)(t-1)(t+1)=0.$$

음이 아닌 근은 $t=0,1,2$이다.

? 생각해 보기 이 세 값이 모두 원래 방정식을 만족하는가?

그렇지 않다. $t = 0$일 때 우변 $t^2 + 2t - 1$은 -1인데, 제곱근은 음수일 수 없다. 따라서 $t = 0$은 제곱하는 과정에서 생긴 거짓 근이다. (직접 확인하면, $x = 0$일 때 (iii)의 좌변은 $1 - 0 - 0 + 1 = 2 \neq 0$이다.) $t = 1$과 $t = 2$일 때 우변은 각각 2와 7로 모두 양수이므로, 이 근들은 실제 해이다. 따라서

$$x = 1, \quad x = 4.$$

(ii)와 (iii) 사이에는 깔끔한 연결 고리가 있다. t를 $-t$로 바꾸면 $-t^2 + 2t + 1$은 $-(t^2 + 2t - 1)$이 되고, 제곱하면 음의 부호가 사라진다. 따라서 (iii)에서 제곱한 방정식은 (ii)에서 제곱한 방정식의 t를 $-t$로 바꾼 것이며, 그 근 $0, \pm 1, 2$는 (ii)의 근 $0, \pm 1, -2$의 부호를 바꾼 것이다.

검산

각 답을 원래 방정식에 대입해 본다. 예를 들어 (iii)에 $x = 4$를 대입하면 $\sqrt{49} - 4 - 4 + 1 = 0$이다. $0 \leq x \leq 50$에서 각 좌변을 촘촘하게 수치적으로 조사해 보았지만 다른 영점은 없었다. (i)에서 좌변은 $x = 1$에서 부호가 바뀌지 않고 0에 닿는데, 이는 이중 인수 $(t - 1)^2$과 일치한다.

흔한 실수

- 제곱하는 쪽의 부호를 확인하지 않아서 (iii)에서 $x = 0$을 남기는 실수.
- t (또는 $\sqrt{x}$)로 나누어서 (i)과 (ii)에서 근 $x = 0$을 잃는 실수.
- 한쪽에 제곱근이 두 개 남은 상태에서 제곱하는 실수. 먼저 $\sqrt{3x^2 + 1}$을 분리해야 한 번의 제곱으로 근호를 없앨 수 있다.

STEP 너머

사상 $A \mapsto A^2$은 $\mathbb{R}$에서 단사(injective)가 아니므로, 양변을 제곱하면 동치(equivalence)가 아니라 함의(implication)만 얻는다. 어떤 단계가 거꾸로도 성립하는지 꼼꼼히 따지는 것은 방정식을 신중하게 푸는 모든 풀이의 바탕이 되는 습관이며, 해석학(analysis)에서는 함수가 언제, 어떤 정의역(domain)에서 역함수(inverse)를 갖는가 하는 질문이 된다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)에 이 내용이 자세히 정리되어 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.