풀이

STEP I 2004, 문제 9

역학 • 포물체 운동

> **STEP I 2004, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q9

핵심 아이디어

첫 부분은 "최고점에서 연직 방향 속도는 0이다"를 이용하는 표준적인 계산이다. 터널 문제에서는 속력 u가 주어지지 않지만, 그렇다고 마음대로 정할 수 있는 것도 아니다. θ를 정하고 나면 경로가 P를 지나야 한다는 조건이 u를 결정한다. 따라서 u를 소거하고, 최대 높이(greatest height)를 θ만의 함수로 (가장 좋게는 $t = \tan\theta$를 써서) 나타낸 다음, 그것이 언제 천장보다 낮게 유지되는지를 묻는다. 답은 t에 대한 이차부등식(quadratic inequality)으로 나온다.

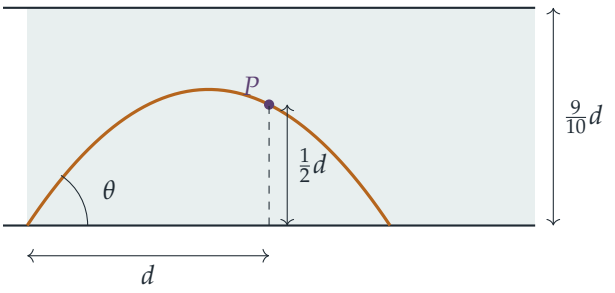
풀이

최대 높이

입자를 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받으며 자유롭게 움직이는 점으로 모형화한다. 발사 지점을 원점으로 하고, x축은 수평 방향, y축은 연직 위 방향으로 잡는다. 속도의 연직 성분은 $u\sin\theta$에서 시작하며 일정한 가속도 $-g$를 가진다. 최고점에서 연직 속도는 0이므로, 연직 방향에 대해 $v^2 = v_0^2 + 2as$를 적용하면

$$0 = u^2\sin^2\theta - 2gH, \qquad \text{따라서} \qquad H = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}.$$

터널



입자의 경로, 즉 궤적(trajectory)은 $x = uT\cos\theta$와 $y = uT\sin\theta - \frac{1}{2}gT^2$에서 시간 T를 소거하여 얻는다.

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta} = xt - \frac{gx^2(1+t^2)}{2u^2},$$

여기서 $t = \tan\theta$이고, $\sec^2\theta = 1 + t^2$을 이용했다.

P를 지날 조건. $x = d, y = \frac{1}{2}d$를 대입하고 d로 나누면

$$\frac{1}{2} = t - \frac{gd(1+t^2)}{2u^2}, \qquad \text{따라서} \qquad \frac{gd(1+t^2)}{2u^2} = t - \frac{1}{2}.$$

좌변은 양수이므로 $t > \frac{1}{2}$이어야 한다. (이는 자연스러운 결과이다. 입자는 처음에 θ 방향으로 출발하고 중력은 경로를 아래쪽으로 휘게 할 뿐이므로, 기울기가 $\frac{1}{2}$인 P로 향하는 직선보다 위쪽을 겨냥해야만 P에 도달할 수 있다.) 이러한 각각의 θ에 대해 가능한 속력은 정확히 하나이다.

$$u^2 = \frac{gd(1+t^2)}{2t-1}.$$

> ? **생각해 보기** 문제에서는 u의 값을 주지 않는다. 어떻게 조건이 θ만으로 주어질 수 있을까?

속력은 우리가 고를 수 있는 것이 아니기 때문이다. "P를 지난다"는 조건이 θ가 정해지는 순간 u를 고정한다. 따라서 최대 높이는 사실상 θ만의 함수이다.

천장에 닿지 않을 조건. H의 공식에 $\sin^2\theta = \dfrac{t^2}{1+t^2}$을 대입하면

$$H = \frac{u^2}{2g}\cdot\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{d(1+t^2)}{2(2t-1)}\cdot\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{dt^2}{2(2t-1)}.$$

입자가 천장에 닿지 않을 필요충분조건은 $H < \frac{9}{10}d$이다. $2t-1>0$이므로 부등식의 방향을 바꾸지 않고 양변에 $10(2t-1)/d$를 곱할 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{dt^2}{2(2t-1)} < \frac{9d}{10} &\iff 5t^2 < 9(2t-1)\\ &\iff 5t^2-18t+9<0\\ &\iff (5t-3)(t-3)<0\\ &\iff \tfrac{3}{5}<t<3.\end{aligned}$$

이 구간의 모든 t는 $t>\frac{1}{2}$를 만족하므로, 앞의 조건은 새로운 제약을 더하지 않는다. $t=\frac{3}{5}$ 또는 $t=3$이면 입자가 천장에 살짝 닿으므로 제외된다. 천장에 전혀 부딪히지 않으므로 입자는 다시 바닥으로 내려와 터널 안에 착지한다.

마지막으로 θ는 0과 $\frac{\pi}{2}$ 사이에 있고, 이 범위에서 tan는 증가하므로

$$\arctan\tfrac{3}{5}<\theta<\arctan 3,$$

가 되어 요구한 결과를 얻는다.

검산

- $t=3$일 때 $H=\dfrac{9d}{2\cdot 5}=\frac{9}{10}d$이고, $t=\frac{3}{5}$일 때 $H=\dfrac{(9/25)d}{2\cdot(1/5)}=\frac{9}{10}d$이다. 예상대로 두 끝점 모두 천장을 스친다.
- $t\to\frac{1}{2}^+$이면 필요한 속력은 $u\to\infty$이고 $H\to\infty$이다. 입자가 P로 가는 직선을 거의 그대로 따라 이동하므로 매우 빨라야 하고, 그 뒤에는 매우 높이 올라간다.
- 수치적으로 $d=3, g=9.8$로 두고 10^5개의 무작위 각도를 시험했다. 각 각도에 대해 u를 구하고 경로가 P를 지나는지 확인했으며, $H<\frac{9}{10}d$가 되는 것은 정확히 $0.5404<\theta<1.2490$일 때임을 확인했다(이는 라디안으로 나타낸 $\arctan 0.6$과 $\arctan 3$이다). 단계별 시뮬레이션으로도 $H=u^2\sin^2\theta/(2g)$임을 확인했다.

흔한 실수

- u를 별개의 미지수로 취급하다가 막히는 경우. 이 값은 P에서의 조건을 이용해 소거해야 한다.
- 부등식의 양변에 $2t-1$을 곱하기 전에 그 부호를 확인하는 것을 잊는 경우.
- P가 천장보다 아래에 있는지만 확인하는 경우. 경로의 최고점은 보통 P를 지난 뒤에 나타나므로, 중요한 것은 최대 높이이다.

STEP 너머

궤적을 $\tan\theta$로 나타내면 포물체 운동(projectile motion) 문제가 t에 대한 이차식 문제로 바뀐다. 같은 기법으로 주어진 속력을 갖는 모든 궤적의 "포락선"(envelope, 궤적들을 둘러싸는 경계 포물선)을 구할 수 있고, 목표물을 맞히는 두 가지 가능한 각도도 얻을 수 있다. 이처럼 일부 매개변수는 제약 조건에 의해 고정되고 나머지가 허용 영역을 이루는 문제는 최적화(optimisation)와 변분법(calculus of variations)으로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이런 방식의 역학을 공부하기 위한 훌륭한 다음 단계이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.