풀이

STEP I 2004, 문제 8

순수수학 • 단조수열과 수학적 귀납법

> **STEP I 2004, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q8

핵심 아이디어

수열이 증가(increasing)함을 보이려면 차 $t_{n+1} - t_n$을 t_n의 함수로 보면 된다. 두 소문항 모두에서 이 차는 인수분해되며, 그 인수는 정확히 점화식(recurrence)의 고정점(fixed point) 2와 3(즉 $t_{n+1} = t_n$이 되는 값)에 대응한다. 따라서 차의 부호는 t_n이 2와 3에 대하여 어디에 있는지에만 달려 있으므로, 실제로 해야 할 일은 모든 항이 올바른 영역에 머문다는 것을 보이는 귀납법(induction)이다.

풀이

소문항 (i)

임의의 n에 대하여

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n^2 + 6}{5} - x_n = \frac{x_n^2 - 5x_n + 6}{5} = \frac{(x_n - 2)(x_n - 3)}{5}.$$

$x_n > 3$이면 두 인수가 모두 양수이므로 $x_{n+1} - x_n > 0$, 즉 $x_{n+1} > x_n$이다.

이제 모든 항이 3보다 큼을 확인해야 하며, 이를 귀납법으로 보인다. 명제 $x_n > 3$은 가정에 의해 $n = 0$일 때 성립한다. $x_n > 3$이라고 하자. 위의 계산에 의해 $x_{n+1} > x_n > 3$이므로 $x_{n+1} > 3$도 성립한다. 따라서 모든 $n \geq 0$에 대하여 $x_n > 3$이고, 그러므로 모든 $n \geq 0$에 대하여 $x_{n+1} > x_n$이다. 즉 이 수열은 순증가(strictly increasing)한다.

> ? **생각해 보기** 왜 $x_1 > x_0$만 보이는 것으로는 충분하지 않을까?

부등식 $x_{n+1} > x_n$은 $x_n > 3$으로부터 유도되었으므로, 첫 단계뿐 아니라 모든 단계에서 그 조건이 필요하다. 여기서는 그 조건이 저절로 따라온다. 3보다 위에서 증가하는 한 단계는

3보다 위에 머문다. (정확히 $x_0 = 3$에서 시작하면 상수수열이 되므로, 등호가 없는 부등식이라는 점이 중요하다는 데 주의하자.)

소문항 (ii)

먼저 $2 < y_n < 3$이면 $y_n > 0$이므로 $y_{n+1} = 5 - 6/y_n$이 정의된다는 점에 주목하자. 이러한 y_n에 대하여

$$y_{n+1} - y_n = 5 - \frac{6}{y_n} - y_n = -\frac{y_n^2 - 5y_n + 6}{y_n} = \frac{(y_n - 2)(3 - y_n)}{y_n},$$

이고, 이 값은 $y_n - 2 > 0, 3 - y_n > 0, y_n > 0$이므로 양수이다. 따라서 $2 < y_n < 3$이기만 하면 $y_{n+1} > y_n$이다.

소문항 (i)에서처럼, 모든 항이 이 구간에 있음을 보여야 한다. 이번에는 이것이 자동으로 성립하지 않는데, 증가하는 수열이 3을 넘어설 수도 있기 때문이다. 그래서 3으로부터의 거리를 살펴본다.

$$3 - y_{n+1} = 3 - 5 + \frac{6}{y_n} = \frac{6 - 2y_n}{y_n} = \frac{2(3 - y_n)}{y_n}.$$

생각해 보기 수열이 결코 3을 뛰어넘지 않는다는 것을 어떻게 알 수 있을까?

위의 식은 $y_n > 0$일 때마다 $3 - y_{n+1}$이 $3 - y_n$과 같은 부호를 가진다는 것을 말해 준다. 따라서 3보다 작은 항 다음에는 항상 3보다 작은 항이 온다.

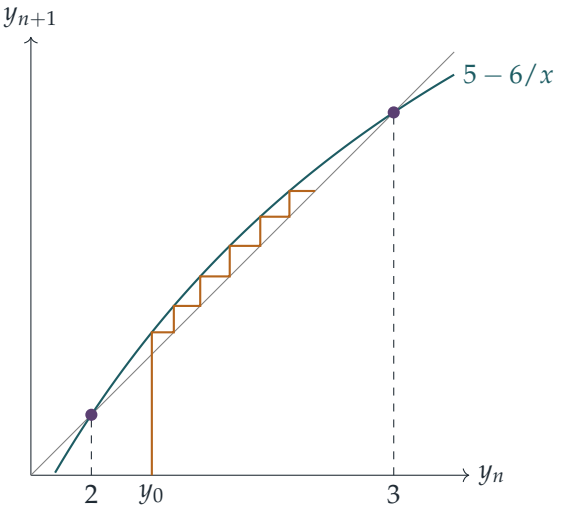
이제 귀납법이다. 주장: 모든 $n \geq 0$에 대하여 $2 < y_n < 3$이다. 이는 가정에 의해 $n = 0$일 때 성립한다. $2 < y_n < 3$이라고 하자. 그러면 다음이 성립한다.

- 차의 계산에 의해 $y_{n+1} > y_n > 2$이다.
- $3 - y_n > 0$이고 $y_n > 0$이므로 $3 - y_{n+1} = 2(3 - y_n)/y_n > 0$이고, 따라서 $y_{n+1} < 3$이다.

그러므로 $2 < y_{n+1} < 3$이고, 귀납법이 완성된다.

모든 n에 대하여 $2 < y_n < 3$이므로 차의 계산이 모든 단계에서 적용되고, 따라서 모든 $n \geq 0$에 대하여 $y_{n+1} > y_n$이다. 이 수열은 순증가하지만, 요구된 대로 모든 n에 대하여 $y_n < 3$이다.

거미줄 그림(cobweb diagram)을 보면 무슨 일이 일어나는지 알 수 있다. 곡선 $y = 5 - 6/x$는 $x = 2$와 $x = 3$에서 직선 $y = x$와 만나고, 그 사이에서는 직선보다 위에 있으며, 반복값(iterate)들은 3을 향해 올라가지만 그 값에 도달하지는 않는다.



검산

- 고정점에서 점화식은 상수수열을 준다. $(3^2+6)/5=3$이고 $5-6/3=3, 5-6/2=2$이며, 이는 인수 $(t-2)(t-3)$과 일치한다.
- $y_0=2.5$에서 시작하면 $y_1=2.6$, $y_2\approx 2.692$, $y_3\approx 2.771$로 증가하며 3보다 작다. 200단계 후에는 y_n과 3의 차이가 10^{-15} 이내이다. $x_0=3.1$에서 시작하면 $x_1=3.122$, $x_2\approx 3.149$로 증가한다.
- 컴퓨터로 수백 개의 무작위 초깃값에 대하여 정확한 분수 계산으로 두 귀납법을 검증하였고, 3보다 약간 작은 x_0에서는 $x_1<x_0$이 됨을 확인하였다. 따라서 조건 $x_0>3$이 필요하다.

흔한 실수

- $x_n>3$이라는 가정 아래 $x_{n+1}>x_n$을 보이고 거기서 멈추어, 모든 항이 3보다 크다는 것을 귀납법으로 증명하지 않는 것.
- 소문항 (ii)에서 $y_{n+1}<3$은 증명하지만, 귀납법을 이어 가려면 $y_{n+1}>2$도 필요하다는 것을 잊는 것(이는 $y_{n+1}>y_n$으로부터 따라 나온다).
- $y_n>0$임을 언급하지 않고 부등식의 양변에 y_n을 곱하는 것.

STEP 너머

소문항 (ii)의 수열은 유계(bounded)인 증가수열이며, 해석학의 **단조수렴정리**(monotone convergence theorem)에 따르면 이러한 수열은 반드시 수렴한다. 임의의 극한 L은 $L = 5 - 6/L$을 만족하므로 여기서는 $y_n \to 3$이다. 소문항 (i)에서는 수열이 한없이 증가하는데, 유한한 극한이 있다면 그것은 3보다 큰 고정점이어야 하지만 그런 고정점은 없기 때문이다. 반복값들이 고정점으로 끌려가는지 아니면 밀려나는지는 그 점에서 사상의 기울기에 달려 있으며, 이것이 이산 동역학계(discrete dynamical systems) 이론의 출발점이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 단조수렴을 자세히 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.