풀이

STEP I 2004, 문제 7

순수수학 • 생성함수

> **STEP I 2004, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q7

핵심 아이디어

선형 점화식(linear recurrence)과 멱급수(power series)는 같은 대상을 두 가지 방식으로 기술한 것이다. 급수에 $1 - 7x + 10x^2$를 곱하면 각 계수(coefficient) a_n이 a_{n-1}, a_{n-2}와 나란히 정렬되므로, 점화식에 의해 곱의 계수가 거의 모두 0이 된다. 남는 것은 다항식이므로 f는 유리함수(rational function)이다. 그다음 부분분수(partial fractions)와 등비급수(geometric series)를 이용하면 a_n을 바로 구할 수 있다. 소문항 (ii)도 주어진 값으로부터 p와 q를 구하고 나면 똑같은 방법으로 풀린다.

풀이

소문항 (i)

$|x| < \frac{1}{5}$이면 급수가 수렴(converge)하므로, x의 거듭제곱을 곱하고 급수끼리 항별로 더할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x) &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n, \\ -7x\,\mathrm{f}(x) &= -7a_0 x - \sum_{n=2}^{\infty} 7a_{n-1} x^n, \\ 10x^2 \mathrm{f}(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} 10a_{n-2} x^n. \end{aligned}$$

(둘째 줄과 셋째 줄에서는 모든 합이 $n \geq 2$인 x^n에 대한 합이 되도록 첨자를 다시 붙였다.) 세 식을 더하면

$$\mathrm{f}(x) - 7x\,\mathrm{f}(x) + 10x^2 \mathrm{f}(x) = a_0 + (a_1 - 7a_0)x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - 7a_{n-1} + 10a_{n-2}) x^n.$$

점화식에 의해 합 안의 괄호는 모두 o이고, $a_0 = 2$, $a_1 - 7a_0 = 7 - 14 = -7$이다. 따라서

$$(1 - 7x + 10x^2)\,\mathrm{f}(x) = 2 - 7x.$$

이제 $1 - 7x + 10x^2 = (1 - 2x)(1 - 5x)$이고, 이는 $|x| < \frac{1}{5}$에서 o이 아니므로 양변을 나눌 수 있다.

$$\mathrm{f}(x) = \frac{2 - 7x}{(1 - 2x)(1 - 5x)}.$$

분자는 두 인수의 합 $(1 - 5x) + (1 - 2x) = 2 - 7x$이므로

$$\mathrm{f}(x) = \frac{(1 - 5x) + (1 - 2x)}{(1 - 2x)(1 - 5x)} = \frac{1}{1 - 2x} + \frac{1}{1 - 5x},$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

$|x| < \frac{1}{5}$이면 $|2x| < 1$이고 $|5x| < 1$이므로, 두 분수는 모두 수렴하는 등비급수의 합이다.

$$\mathrm{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 5^n)x^n.$$

? **생각해 보기** 이제 왜 a_n을 바로 읽어 낼 수 있는가?

구간 $|x| < \frac{1}{5}$의 모든 x에서 값이 같은 두 멱급수를 얻었다. 멱급수는 0 근방에서의 값으로 결정된다. 계수를 $a_n = \mathrm{f}^{(n)}(0)/n!$로 되찾을 수 있기 때문이다. 따라서 계수가 일치해야 하고,

$$a_n = 2^n + 5^n \quad \text{모든} n \geq 0.$$

에 대하여 성립한다. (간단히 확인해 보면 $a_0 = 1 + 1 = 2$, $a_1 = 2 + 5 = 7$이다.)

소문항 (ii)

먼저 p와 q를 구해야 한다. 점화식에 $n = 2$와 $n = 3$을 대입하면

$$b_2 = pb_1 + qb_0 : \quad 40 = 10p + 5q, \quad \text{따라서} 2p + q = 8;$$
$$b_3 = pb_2 + qb_1 : \quad 100 = 40p + 10q, \quad \text{따라서} 4p + q = 10.$$

두 식을 빼면 $2p = 2$이므로 $p = 1$, $q = 6$이다. 점화식은 $b_n = b_{n-1} + 6b_{n-2}$이다.

소문항 (i)과 똑같이, $1 - x - 6x^2$를 곱하면 x^2 이후의 모든 계수가 사라진다.

$$(1 - x - 6x^2)\,\mathrm{g}(x) = b_0 + (b_1 - b_0)x = 5 + 5x.$$

$1 - x - 6x^2 = (1 - 3x)(1 + 2x)$이고 이는 $|x| < \frac{1}{3}$에서 o이 아니므로

$$\mathrm{g}(x) = \frac{5 + 5x}{(1 - 3x)(1 + 2x)} = \frac{A}{1 - 3x} + \frac{B}{1 + 2x},$$

이다. 여기서 $5+5x = A(1+2x)+B(1-3x)$이다. $x=\frac{1}{3}$을 대입하면 $\frac{20}{3}=\frac{5}{3}A$이므로 $A=4$이고, $x=-\frac{1}{2}$를 대입하면 $\frac{5}{2}=\frac{5}{2}B$이므로 $B=1$이다. 따라서

$$\mathrm{g}(x)=\frac{4}{1-3x}+\frac{1}{1+2x}.$$

$|x|<\frac{1}{3}$이면 $|3x|<1$이고 $|2x|<1$이므로, 둘 다 등비급수로 전개하면

$$\mathrm{g}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(4\cdot 3^n+(-2)^n)x^n,$$

이고, 앞에서와 같이 계수를 비교하면

$$b_n=4\cdot 3^n+(-2)^n.$$

검산

이 공식은 주어진 값을 그대로 재현한다. $4+1=5$, $12-2=10$, $36+4=40$, $108-8=100$이다. 점화식으로 a_n과 b_n을 $n=39$까지 계산하면 2^n+5^n 및 $4\cdot 3^n+(-2)^n$과 정확히 일치한다. 수치적으로도, $x=0.1$에서 급수의 부분합은 f에 대해 3.25, g에 대해 6.547619…를 주며, 이는 $\frac{1}{0.8}+\frac{1}{0.5}=3.25$ 및 $\frac{4}{0.7}+\frac{1}{1.2}=\frac{275}{42}$와 일치한다.

흔한 실수

- 점화식이 $n=2$부터만 성립한다는 점을 잊는 것. 곱에서 x^0항과 x^1항은 따로 계산해야 하며, 이 항들이 분자가 된다.
- 소문항 (ii)에서 p와 q를 아직 모르는 채로 점화식을 쓰거나, 분자를 $b_0+(b_1-pb_0)x$가 아니라 b_0+b_1x로 쓰는 것.
- $1-x-6x^2$를 인수분해할 때 부호를 잘못 써서, 3^n과 $(-2)^n$ 대신 3^n과 2^n을 얻는 것.

STEP 너머

급수 f를 수열 (a_n)의 **생성함수**(*generating function*)라고 하며, 이 방법은 상수 계수를 갖는 모든 선형 점화식에 통한다. 분모는 언제나 점화식으로부터 만들어지고, 그 인수들이 "특성근(characteristic roots)"(여기서는 2와 5)을 준다. 생성함수는 조합론(combinatorics)과 확률론의 핵심 도구이며, 확률론에서는 확률생성함수(probability generating function)가 확률변수(random variable)의 합을 곱으로 바꾸어 준다. "같은 멱급수는 계수가 같다"는 단계는 해석학(analysis) 첫 강의에서 엄밀하게 정당화된다. 멱급수와 그 유일성에 대해서는 Abbott, *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를 보라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.