풀이

STEP I 2004, 문제 6

순수수학 • 삼각형의 벡터 기하

> **STEP I 2004, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q6

핵심 아이디어

x좌표와 y좌표를 따로 다루지 말고 위치벡터(position vector)로 생각한다. 즉 $\mathbf{a} = (p_1, q_1)$, $\mathbf{b} = (p_2, q_2)$, $\mathbf{c} = (p_3, q_3)$로 쓰면 H의 위치벡터는 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$이다. 그러면 문제에 나오는 모든 직선을 벡터로 짧게 나타낼 수 있고, "직각으로 만난다"는 조건은 "내적(scalar product)이 0이다"가 된다. 이때 나타나는 내적은 제곱의 차(difference of two squares) $(\mathbf{c} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b})$이며, 문제의 후반부는 이것이 전부이다.

풀이

A, B, C는 한 직선 위에 있지 않다(not collinear)고 가정하여, 이 세 점이 진짜 삼각형을 이룬다고 하자(그렇지 않으면 첫 부분의 직선들이 일치할 수 있어서 교점이 하나로 정해지지 않는다).

중선은 한 점에서 만난다

L, M, N을 각각 BC, CA, AB의 중점이라 하면, 그 위치벡터는 다음과 같다.

$$\mathbf{l} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}), \qquad \mathbf{m} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}), \qquad \mathbf{n} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

직선 AL 위의 일반적인 점은

$$\mathbf{a} + s(\mathbf{l} - \mathbf{a}) = (1 - s)\,\mathbf{a} + \tfrac{s}{2}\,\mathbf{b} + \tfrac{s}{2}\,\mathbf{c},$$

이고, 직선 BM 위의 일반적인 점은

$$\mathbf{b} + t(\mathbf{m} - \mathbf{b}) = \tfrac{t}{2}\,\mathbf{a} + (1 - t)\,\mathbf{b} + \tfrac{t}{2}\,\mathbf{c}.$$

이다. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$의 계수가 각각 같으면 두 식은 같아진다. 즉 $1-s=\frac{t}{2}$, $\frac{s}{2}=1-t$, $\frac{s}{2}=\frac{t}{2}$이면 된다. 마지막 식에서 $s=t$이고, 이를 $1-s=\frac{s}{2}$에 넣으면 $s=t=\frac{2}{3}$을 얻는데, 이 값은 세 식을 모두 만족한다. 따라서 두 직선은 모두 위치벡터가

$$\mathbf{g}=\tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}), \qquad \text{즉,} \qquad G=\left(\tfrac{p_1+p_2+p_3}{3},\ \tfrac{q_1+q_2+q_3}{3}\right).$$

인 점 G를 지난다.

> **생각해 보기** 계수 비교로 하나의 공통점을 찾았다. 그것이 바로 그 교점이라는 것은 어떻게 아는가?

서로 다른 두 직선은 많아야 한 점에서 만나므로, AL과 BM이 서로 다른 직선이라는 것만 보이면 된다. 만약 두 직선이 같다면 그 직선은 A, B, L을 포함하므로 직선 BL 전체, 즉 직선 BC를 포함한다. 그러면 A가 BC 위에 있게 되어 가정에 모순이다. 따라서 G는 유일한 교점이다.

세 번째 중선 CN에 대해서는 $u=\frac{2}{3}$일 때의 점 $\mathbf{c}+u(\mathbf{n}-\mathbf{c})$를 생각한다.

$$\mathbf{c}+\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{a}+\tfrac{1}{2}\mathbf{b}-\mathbf{c}\right)=\tfrac{1}{3}\mathbf{a}+\tfrac{1}{3}\mathbf{b}+\tfrac{1}{3}\mathbf{c}=\mathbf{g}.$$

따라서 G는 C와 AB의 중점을 잇는 직선 위에 있으며, 이것이 보이려던 것이다. (매번 나온 값 $\frac{2}{3}$은 무게중심(centroid) G가 각 중선(median) 위에서 꼭짓점으로부터 3분의 2 지점에 있음을 말해 준다.)

H에서의 수직 조건

점 H의 위치벡터는 $\mathbf{h}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$이므로

$$\overrightarrow{AH}=\mathbf{h}-\mathbf{a}=\mathbf{b}+\mathbf{c}, \qquad \overrightarrow{BC}=\mathbf{c}-\mathbf{b}.$$

이다. 직선 AH가 BC와 직각으로 만나면 이 두 방향벡터의 내적은 0이다.

$$0=(\mathbf{c}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{b})=\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}-\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}=(p_3^2+q_3^2)-(p_2^2+q_2^2),$$

여기서 교차항 $\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}$와 $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$는 내적의 교환법칙(commutative)에 의해 서로 소거된다. 따라서

$$p_2^2+q_2^2=p_3^2+q_3^2,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다. 말로 하면, B와 C는 원점 O로부터 같은 거리에 있다.

똑같은 방법으로 $\overrightarrow{BH}=\mathbf{a}+\mathbf{c}$이고 $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}-\mathbf{a}$이므로, BH가 AC와 직각으로 만나면 $(\mathbf{c}+\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$이 되어

$$p_1^2+q_1^2=p_3^2+q_3^2.$$

을 얻는다.

세 번째 수선

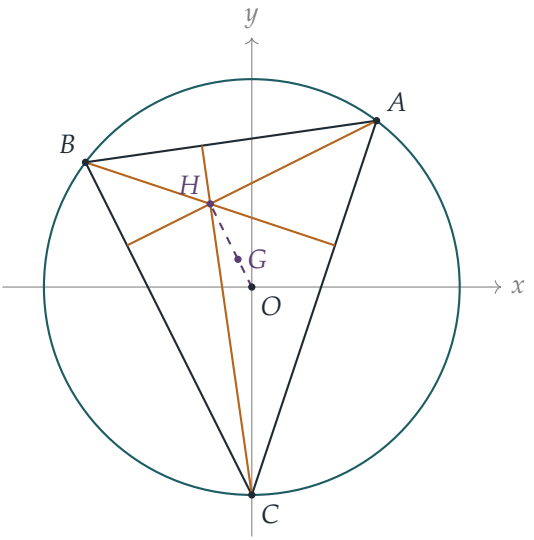
두 수직 조건이 모두 성립한다고 하자. 위의 두 결과를 합치면

$$p_1^2 + q_1^2 = p_3^2 + q_3^2 = p_2^2 + q_2^2, \qquad \text{따라서} \qquad \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}.$$

이다. 이제 $\overrightarrow{CH} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$이고 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$이므로

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB} = (\mathbf{b}+\mathbf{a})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = 0.$$

이다. 따라서 CH는 AB에 수직이다(단, CH가 진짜 직선이 되도록 $H \neq C$이어야 한다. $H = C$이면 이 명제는 내용이 없다). 이로써 추론이 완성된다.



그림은 마지막 부분의 상황을 보여 준다. A, B, C는 원점 O를 중심으로 하는 원 위에 있고, 세 수선(altitude, 호박색)은 모두 H를 지나며, O, G, H는 $\mathbf{h} = 3\mathbf{g}$를 만족하면서 한 직선 위에 있다.

검산

- $A = (3,4)$, $B = (-4,3)$, $C = (0,-5)$로 잡으면, 세 점 모두 O로부터의 거리가 5이다. 이 때 $H = (-1,2)$이고 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = (-4)(4) + (-2)(-8) = 0$이며, 나머지 두 내적도 0이다. 무게중심은 $G = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$으로 H의 3분의 1이다.
- 수치적으로, 꼭짓점이 정수인 무작위 삼각형 약 2000개에 대해 두 중선의 교점을 분수로 정확히 계산하면 항상 $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$였고 세 번째 중선 위에 있었다. 또한 O를 중심으로 하는 원에 내접하는 무작위 삼각형 1000개에 대해 H에 관한 세 내적이 모두 0이 되었다.

흔한 실수

- 두 중선이 G를 지난다는 것만 보이고, 두 중선이 같은 직선일 수 없는 이유를 말하지 않는 것. A, B, C가 한 직선 위에 있지 않다는 한 문장이면 해결된다.
- $\overrightarrow{OH} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$를 AH의 방향으로 쓰는 것. 방향은 $\mathbf{h} - \mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$이다.
- 이 결과가 모든 삼각형에서 성립한다고 생각하는 것. 가정에 의해 O는 A, B, C로부터 같은 거리에 있어야 한다. 원점이 일반적인 위치에 있으면 H는 수심(orthocentre)이 아니다.

STEP 너머

마지막 부분은 삼각형의 세 수선이 한 점에서 만난다(concurrent)는 것을 증명한다. 원점을 외심(circumcentre) O(꼭짓점들로부터 같은 거리에 있는 점)에 두면, 점 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$가 세 수선 위에 모두 놓인다. 또 $\mathbf{h} = 3\mathbf{g}$이므로 외심, 무게중심, 수심이 한 직선, 즉 **오일러 직선**(Euler line) 위에 있고 $OG : GH = 1 : 2$임도 증명된다. 좌표에 의존하지 않는 항등식이 일을 해 주는 이런 벡터식 기하는 대학 1학년 선형대수학(linear algebra)에서 기하를 다루는 방식이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)가 이를 전개하며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 STEP 유형의 연습 문제가 더 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.