풀이

STEP I 2004, 문제 5

순수수학 • 5를 법으로 하는 나머지

> **STEP I 2004, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q5

핵심 아이디어

다섯 개의 등차수열(arithmetic progression)은 양의 정수를 5로 나눈 나머지(remainder)에 따라 분류한다. 각 부류의 일반항(general term)을 $5n-3$과 같은 꼴로 나타내면, 합과 제곱을 전개한 뒤 5를 인수로 묶어 내어 추적할 수 있다. 이렇게 하면 제곱수가 어느 부류에 들어갈 수 있는지 완전히 파악할 수 있고, 두 불가능성 증명이 모두 여기서 따라 나온다. 우변은 좌변이 결코 도달할 수 없는 부류에 속하기 때문이다.

풀이

일반항

각 수열의 공차(common difference)는 5이므로, $n = 1, 2, 3, \ldots$에 대하여 제 n항은 다음과 같다.

$$A:\ 5n-4, \qquad B:\ 5n-3, \qquad C:\ 5n-2, \qquad D:\ 5n-1, \qquad E:\ 5n.$$

($n=1$을 대입하여 각각이 처음 나열된 항을 주는지 확인하라.) 따라서 양의 정수가 A, B, C, D, E에 속하는 것은 각각 5로 나눈 나머지가 1, 2, 3, 4, 0일 때와 정확히 같다.

B의 항과 C의 항의 합

$m, n \geq 1$에 대하여 B의 임의의 항 $5m-3$과 C의 임의의 항 $5n-2$를 잡자. 그러면

$$(5m-3)+(5n-2) = 5m+5n-5 = 5(m+n-1).$$

$m+n-1 \geq 1$은 양의 정수이므로, 이것은 E의 제 $(m+n-1)$항이다. 이로써 증명이 끝난다.

B와 C의 항의 제곱

B의 항 $5m-3$에 대하여

$$\begin{aligned}(5m-3)^2 &= 25m^2-30m+9\\ &= 5(5m^2-6m+2)-1.\end{aligned}$$

여기서 $k = 5m^2-6m+2$는 정수이고, 모든 $m \geq 1$에 대하여 $k = 5m^2-6m+2 = m(5m-6)+2 \geq 1$이다($m=1$일 때 그 값은 1이고, $m \geq 2$이면 m과 $5m-6$이 모두 양수이다). 따라서 $(5m-3)^2 = 5k-1$은 D의 제 k항이다. 즉 B의 항의 제곱은 모두 D에 속한다.

C에 대한 비슷한 명제는 다음과 같다. **C의 모든 항의 제곱도 D의 항이다.** 실제로 C의 항 $5m-2$에 대하여

$$\begin{aligned}(5m-2)^2 &= 25m^2-20m+4\\ &= 5(5m^2-4m+1)-1,\end{aligned}$$

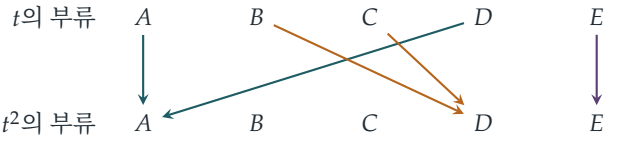
이고, $m \geq 1$이면 $k = 5m^2-4m+1 = m(5m-4)+1 \geq 2$이다. 따라서 $(5m-2)^2$은 D의 제 k항이다.

? **생각해 보기** A, D, E의 항의 제곱은 어디로 가는가?

소문항 (i)과 (ii)에 이것이 필요하므로, 나머지 세 부류도 같은 방법으로 계산해 둘 가치가 있다.

$$\begin{aligned}(5m-4)^2 &= 25m^2-40m+16 = 5(5m^2-8m+4)-4 && (A\text{에 속함}),\\ (5m-1)^2 &= 25m^2-10m+1 = 5(5m^2-2m+1)-4 && (A\text{에 속함}),\\ (5m)^2 &= 5(5m^2) && (E\text{에 속함}).\end{aligned}$$

$m \geq 1$이면 괄호 안의 값은 양의 정수이다(예를 들어 $5m^2-8m+4 = m(5m-8)+4 \geq 1$이고, $5m^2-2m+1 \geq 4$이다). 따라서 제곱하면 각 부류는 다음과 같이 옮겨진다.



특히 **어떤 완전제곱수**(*perfect square*)**도 B나 C에 속하지 않는다.** 모든 양의 제곱수는 A, D, E 중 하나에 속한다.

소문항 (i)

양의 정수 x와 y가 $x^2 + 5y = 243\,723$을 만족한다고 가정하자. $243\,723 = 5 \times 48\,744 + 3$이므로 우변은 C의 항 $5 \times 48\,745 - 2$이다. 그러면

$$x^2 = 243\,723 - 5y = 5(48\,745 - y) - 2.$$

이 값은 x^2이므로 양수이고, 따라서 $48\,745 - y$는 양의 정수이며 x^2은 C의 항이다. 그러나 앞에서 어떤 제곱수도 C에 속하지 않음을 보였다. 이 모순(contradiction)으로부터 그러한 양의 정수 x와 y는 존재하지 않는다.

소문항 (ii)

네제곱(fourth power)은 제곱수의 제곱이다. 제곱수 x^2은 A, D, E 중 하나에 속하고, A나 D의 항을 제곱하면 A의 항이 되며, E의 항을 제곱하면 E의 항이 된다. 따라서 임의의 양의 정수 x에 대하여

x^4는 다음에 속한다: A 또는E, 즉, x^4를 나눈 나머지는1 또는0이다. 이때 나누는 수는5.

y^4에 대해서도 마찬가지이므로, $2y^4$를 나눈 나머지는 2 또는 0이다. 이를 더하면, $x^4 + 2y^4$를 5로 나눈 나머지는 다음 중 하나의 나머지와 같다.

$$1 + 2 = 3, \qquad 1 + 0 = 1, \qquad 0 + 2 = 2, \qquad 0 + 0 = 0,$$

따라서 $x^4 + 2y^4$는 C, A, B, E 중 하나에 속하고, D에는 **결코** 속하지 않는다.

> ? **생각해 보기** 왜 나머지끼리 그냥 더해도 되는가?

$x^4 = 5a + r$이고 $2y^4 = 5b + s$이면 $x^4 + 2y^4 = 5(a + b) + (r + s)$이므로, 그 합은 $r + s$와 5의 배수만큼 차이 나고 $r + s$와 같은 부류에 속한다. 이것은 앞에서 $B + C$에 대해 했던 계산을 일반적인 꼴로 한 것과 정확히 같다.

이제 $26\,081\,974 = 5 \times 5\,216\,395 - 1$은 일의 자리 숫자가 4이므로 D의 항이다. 따라서 이 수는 어떤 양의 정수 x와 y에 대해서도 $x^4 + 2y^4$와 같을 수 없다. 이로써 증명이 끝난다.

검산

- 작은 경우: $2^2 = 4, 7^2 = 49, 12^2 = 144$는 모두 일의 자리 숫자가 4 또는 9이므로 D에 속한다. $3^2 = 9, 8^2 = 64, 13^2 = 169$도 마찬가지이다.
- 네제곱수: $1, 16, 81, 256, 625, 1296$은 모두 일의 자리 숫자가 1, 6, 5 중 하나이므로 A 또는 E에 속한다.

- 컴퓨터로 $x \leq \sqrt{243\,723} \approx 493.7$인 모든 경우를 탐색해 보면 $243\,723 - x^2$이 5의 양의 배수가 되는 x는 없고, $x^4 < 26\,081\,974$인(즉 $x \leq 71$인) 모든 x를 탐색해 보면 $2y^4 = 26\,081\,974 - x^4$을 만족하는 y는 없다.

흔한 실수

- E의 일반항을 $5n + 5$로, A의 일반항을 $5n + 1$로 쓰는 것은 괜찮지만, 그러면 n은 0부터 시작한다. 두 가지 규약을 섞어 쓰면 항이 하나씩 어긋난다.
- 소문항 (i)에서 $x^2 > 0$이므로 $48\,745 - y$가 **양의** 정수라는 사실을 쓰는 것을 잊는 경우. 이것이 없으면 수열에는 양의 정수만 들어 있으므로 x^2이 C의 항이라고 할 수 없다.
- 소문항 (ii)에서 x^4만 다루고, 인수 2 때문에 y^4의 나머지가 1에서 2로 바뀐다는 것을 잊는 경우.

STEP 너머

다섯 개의 등차수열은 5를 법(modulus)으로 하는 잉여류(residue class)이고, 이 문제 전체는 $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$에서의 산술이다. 거기서 제곱수는 $0, 1, 4$(**이차잉여**(*quadratic residues*))이고 네 제곱수는 $0, 1$인데, 이는 $5 \nmid a$일 때 $a^4 \equiv 1 \pmod 5$라는 페르마의 소정리(Fermat's little theorem)의 한 예이다. 디오판토스 방정식(Diophantine equation)을 잘 고른 수를 법으로 하여 줄여 보는 것은 해가 없음을 증명하는 첫 번째 도구이다. 대븐포트(Davenport)의 *The Higher Arithmetic*(고등 산술)은 합동식(congruences)과 이차잉여를 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.