풀이

STEP I 2004, 문제 4

순수수학 • 치환적분

> **STEP I 2004, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q4

핵심 아이디어

$\sqrt{x^2-1}$을 보면 언제나 항등식 $\sec^2 t - 1 = \tan^2 t$를 떠올린다. $x = \sec t$로 치환(substitution)하면 제곱근이 $\tan t$가 되고, $\mathrm{d}x = \sec t \tan t \, \mathrm{d}t$이므로 $\tan t$도 약분된다. 소문항 (ii)와 (iii)은 달라 보이지만, 근호 안에서 완전제곱식을 만들면(completing the square) 둘 다 $u = x + 2$에 대하여 $\sqrt{u^2 - a^2}$이라는 같은 꼴이 되고, 근호 밖의 인수 $x+2$는 바로 이 치환에 필요한 것이 된다.

풀이

도함수

$\sec t = (\cos t)^{-1}$로 쓰고 연쇄법칙(chain rule)을 이용하면

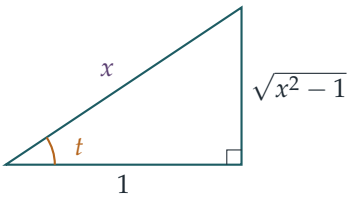
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sec t = -(\cos t)^{-2} \cdot (-\sin t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t} = \sec t \tan t.$$

소문항 (i)

$x = \sec t$로 놓으면 $\mathrm{d}x = \sec t \tan t \, \mathrm{d}t$이다. $x = \sqrt{2}$일 때 $\cos t = 1/\sqrt{2}$이고 $t = \frac{\pi}{4}$이며, $x = 2$일 때 $\cos t = \frac{1}{2}$이고 $t = \frac{\pi}{3}$이다. $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$에 속하는 t에 대하여 $\tan t > 0$이므로

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2 t - 1} = \sqrt{\tan^2 t} = \tan t$$

이다(절댓값 기호가 필요 없다). 아래 삼각형도 같은 사실을 보여 준다. 빗변이 x, 이웃변이 1이므로 대변은 $\sqrt{x^2-1}$이다.



적분은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec t\tan t}{\sec^3 t\,\tan t}\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \tfrac{1}{2}(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t = \left[\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sin 2t\right]_{\pi/4}^{\pi/3} \\ &= \left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right) - \left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}-2}{8} + \frac{\pi}{24},\end{aligned}$$

여기서 $\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)$, $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$을 이용하였다. 이것이 구하는 결과이다.

소문항 (ii)

? **생각해 보기** 소문항 (ii)에는 $\sqrt{x^2-1}$이 없다. 소문항 (i)이 어떻게 도움이 될까?

근호 안을 전개하고 완전제곱식을 만든다.

$$(x+1)(x+3) = x^2+4x+3 = (x+2)^2 - 1.$$

따라서 $u = x+2$로 놓으면($\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$) 적분은 다음과 같다.

$$\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,\mathrm{d}u.$$

피적분함수(integrand)는 $u^2 > 1$일 때만 정의된다. 먼저 $u > 1$(즉 $x > -1$)인 경우를 생각하여, $0 < t < \frac{\pi}{2}$인 $u = \sec t$로 놓으면 $\tan t > 0$이고 $\sqrt{u^2-1} = \tan t$이다. 그러면

$$\int \frac{\sec t\tan t}{\sec t\,\tan t}\,\mathrm{d}t = \int 1\,\mathrm{d}t = t + C,$$

이고, $\sec t = u$이므로 $t = \operatorname{arcsec} u$(즉 $\arccos(1/u)$)이다. 따라서 $x > -1$일 때

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{(x+1)(x+3)}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arcsec}(x+2) + C.$$

빠짐없이 다루기 위해 덧붙이면, 피적분함수는 $u < -1$이 되는 $x < -3$에서도 정의된다. 이때 $v > 1$인 $u = -v$로 놓으면 피적분함수 $\dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\,\mathrm{d}u$는 $\dfrac{1}{(-v)\sqrt{v^2-1}}(-\mathrm{d}v) =$

$\dfrac{1}{v\sqrt{v^2-1}}\,\mathrm{d}v$가 되고, 이를 적분하면 $\operatorname{arcsec} v$가 된다. 두 경우 모두 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\operatorname{arcsec}|x+2| + C = \arccos\frac{1}{|x+2|} + C,$$

단, 두 구간에서 상수는 서로 다를 수 있다.

소문항 (iii)

이번에도 완전제곱식을 만든다.

$$x^2 + 4x - 5 = (x+2)^2 - 9,$$

따라서 $u = x+2$로 놓으면 $\displaystyle\int \frac{1}{u\sqrt{u^2-9}}\,\mathrm{d}u$를 구해야 한다. 이번에 자연스러운 치환은 $u = 3\sec t$로, $u^2 - 9 = 9\tan^2 t$가 되도록 고른 것이다. $u > 3$(즉 $x > 1$)일 때 $0 < t < \frac{\pi}{2}$로 잡으면 $\sqrt{u^2-9} = 3\tan t$이고 $\mathrm{d}u = 3\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$이다. 그러면

$$\int \frac{3\sec t\tan t}{3\sec t\cdot 3\tan t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{3}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{3} + C,$$

이고 $\sec t = u/3$이다. 따라서 $x > 1$일 때

$$\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x-5}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\operatorname{arcsec}\frac{x+2}{3} + C.$$

소문항 (ii)와 똑같이, $x < -5$인 경우($u < -3$)는 $u = -v$로 처리하며, 두 구간 모두 $\frac{1}{3}\operatorname{arcsec}(\frac{1}{3}|x+2|) + C$로 나타낼 수 있다.

검산

- 소문항 (i)의 적분에 심프슨 공식(Simpson's rule)을 적용하면 0.0974060…이 나오며, 이는 $\frac{1}{8}(\sqrt{3}-2) + \frac{\pi}{24}$와 일치한다.
- 답을 미분해 본다. $u > 1$일 때 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\operatorname{arcsec} u = \dfrac{1}{u\sqrt{u^2-1}}$이다($u = \sec t$로 놓고 처음에 구한 도함수를 이용한다). 예를 들어 소문항 (ii)의 피적분함수에 대한 $\int_0^3$의 값은 수치적으로 0.322241이고, $\operatorname{arcsec}5 - \operatorname{arcsec}2 = \arccos\frac{1}{5} - \frac{\pi}{3}$와 일치한다.
- 소문항 (iii)은 소문항 (ii)의 척도를 바꾼 것이어야 한다. $u = 3w$로 놓으면 $\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-9}} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}w}{w\sqrt{w^2-1}}$이고, 이것이 인수 $\frac{1}{3}$이 나타나는 이유이다.

흔한 실수

- 소문항 (i)에서 적분 구간을 바꾸는 것을 잊거나, 위끝과 아래끝을 거꾸로 잡는 것. $\sec t = \sqrt{2}$이면 $t = \frac{\pi}{4}$이지 $\frac{\pi}{3}$이 아니다.

- 사용하는 범위에서 $\tan t$의 부호를 확인하지 않고 $\sqrt{\tan^2 t} = \tan t$로 쓰는 것.
- 소문항 (iii)에서 $u = 3\sec t$ 대신 $u = \sec t$로 치환하여, 간단히 할 항등식이 없는 $\sqrt{\sec^2 t - 9}$가 남는 것.

STEP 너머

역시컨트(inverse secant)는 한 함수족의 일원이다. 치환 $x = a\sin t$, $a\tan t$, $a\sec t$(또는 이들의 쌍곡함수 사촌인 $a\sinh t$, $a\cosh t$)는 각각 $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$을 다루기 쉽게 만들고, 완전제곱식을 만들면 어떤 $\sqrt{\text{이차식}}$이든 이 가운데 하나로 바꿀 수 있다. 부호에 대해, 그리고 원시함수(antiderivative)가 어느 구간에서 정의되는지에 대해 기울여야 하는 주의는 해석학(analysis) 강의에서 적분을 엄밀하게 다루는 방식을 처음 맛보는 것이다. Bartle과 Sherbert의 *Introduction to Real Analysis*(실해석학 입문)는 치환 정리를 제대로 다루며, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(고급 수학 문제)에는 이런 정신의 STEP 적분 문제가 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.