풀이

STEP I 2004, 문제 3

순수수학 • 이변수 다항식의 인수분해

> **STEP I 2004, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q3

핵심 아이디어

두 변수의 다항식(polynomial)은 그중 한 변수에 대한 다항식으로, 즉 다른 변수가 포함된 계수를 갖는 다항식으로 볼 수 있다. x에 대한 다항식으로 보면 인수정리(factor theorem)도 그대로 성립하고, 다항식의 나눗셈(long division)도 그대로 할 수 있으며, x에 대한 이차식은 판별식(discriminant)이 완전제곱식(perfect square)일 때 여전히 인수분해(factorise)된다. 소문항 (ii)에서는 x에 대한 최고차항의 계수(leading coefficient) 자체가 y에 대한 일차식인데, 이는 인수 하나가 y만으로 이루어져 있음을 암시한다.

풀이

소문항 (i)

식 $(*)$를 x의 거듭제곱에 대하여 정리한다.

$$P(x) = x^3 + (2y-5)x^2 + (y^2 - 8y + 6)x + (6y - 3y^2).$$

$x = 3$을 대입하면

$$\begin{aligned} P(3) &= 27 + 9(2y-5) + 3(y^2 - 8y + 6) + 6y - 3y^2 \\ &= (27 - 45 + 18) + (18y - 24y + 6y) + (3y^2 - 3y^2) = 0 \end{aligned}$$

이 모든 y에 대하여 성립하므로, 인수정리에 의해 $x - 3$은 인수이다. 이로써 증명되었다.

나머지 인수를 구하기 위해 $P(x) = (x-3)(x^2 + px + q)$로 놓자. 여기서 p와 q는 y에 따라 달라질 수 있다. 우변을 전개하면 $x^3 + (p-3)x^2 + (q-3p)x - 3q$이고, 계수를 비

교(comparing coefficients)하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x^2: &\quad p-3=2y-5, && \text{따라서} p=2y-2,\\ x^0: &\quad -3q=6y-3y^2, && \text{따라서} q=y^2-2y, \end{aligned}$$

또한 x의 계수도 $q-3p=y^2-8y+6$으로 예상대로 맞아떨어진다. 따라서 이차 인수는

$$x^2+(2y-2)x+y^2-2y=(x^2+2xy+y^2)-2(x+y)=(x+y)(x+y-2).$$

생각해 보기 이 이차식이 인수분해된다는 것을 어떻게 알아챘을까?

$x^2+2xy+y^2$은 완전제곱식 $(x+y)^2$이고, 나머지 항 $-2x-2y$는 $x+y$의 배수이다. (이렇게 묶는 방법이 바로 떠오르지 않는다면, x에 대한 판별식이 $(2y-2)^2-4(y^2-2y)=4$로 완전제곱수이므로 근은 $x=-y+1\pm 1$, 즉 $x=-y$와 $x=2-y$이다.) 그러므로

$$(*)=(x-3)(x+y)(x+y-2),$$

이고, $a=1, b=0, c=1, d=-2$이다. (또는 두 인수의 순서를 바꾸어 $a=1, b=-2, c=1, d=0$이다.)

소문항 (ii)

주어진 식을 Q라 하고, 다시 x의 거듭제곱에 대하여 정리한다.

$$Q=(y+2)x^2+(12-4y-5y^2)x+(6y^3-y^2-21y+10).$$

x^2의 계수는 $y+2$이다. Q가 세 일차 인수의 곱이라면 x^2항은 그중 두 인수의 x 부분에서 나오므로, $y+2$가 식 전체를 나누는지 묻는 것이 자연스럽다. $y=-2$로 놓으면

$$12+8-20=0, \qquad -48-4+42+10=0,$$

이므로 나머지 두 계수는 모두 $y=-2$에서 0이 되고, (y에 대한) 인수정리에 의해 각각 $y+2$로 나누어떨어진다.

$$\begin{aligned} 12-4y-5y^2&=-(5y^2+4y-12)=-(y+2)(5y-6),\\ 6y^3-y^2-21y+10&=(y+2)(6y^2-13y+5). \end{aligned}$$

또한 $6y^2-13y+5=(2y-1)(3y-5)$이다. 따라서

$$Q=(y+2)[x^2-(5y-6)x+(2y-1)(3y-5)].$$

생각해 보기 대괄호 안의 식은 인수분해될까? 그리고 그것을 어떻게 알 수 있을까?

x에 대한 판별식은

$$\begin{aligned}(5y-6)^2-4(2y-1)(3y-5) &= 25y^2-60y+36-(24y^2-52y+20)\\ &= y^2-8y+16=(y-4)^2,\end{aligned}$$

으로 완전제곱식이므로 인수분해된다. 더 빠르게는 $(2y-1)+(3y-5)=5y-6$이므로, 곱이 $(2y-1)(3y-5)$이고 합이 $5y-6$인 두 수는 $2y-1$과 $3y-5$이며, 근은 $x=2y-1$과 $x=3y-5$이다. 그러므로

$$Q=(y+2)(x-2y+1)(x-3y+5).$$

검산

- 소문항 (i)에 $x=y=1$을 대입하면 $(*)$는 $1-5+2+1-8-3+6+6=0$이고, $(1-3)(2)(0)=0$이다. $x=2, y=1$이면 $(*)$는 $8-20+8+2-16-3+12+6=-3$이고, $(-1)(3)(1)=-3$이다.
- 소문항 (ii)에 $x=y=0$을 대입하면 $Q=10$이고 $(2)(1)(5)=10$이다. $x=1, y=1$이면 $Q=6-1-21+2+12-4+1-5+10=0$이고, 실제로 $x-2y+1=0$이다.
- 두 인수분해를 무작위로 고른 2000개의 점 (x,y)에서 정확한 유리수 연산으로 확인했으며, 모든 점에서 일치했다.

흔한 실수

- 식을 x에 대한 다항식으로 다루면서 "상수"항이 x가 없는 모든 항, 즉 소문항 (i)에서는 $6y-3y^2$이라는 사실을 잊는 것.
- 소문항 (ii)에서 k가 수인 근 $x=k$를 찾으려 하는 것. $x-k$ 꼴의 인수는 존재하지 않는다. 먼저 찾아야 할 것은 x가 들어 있지 않은 인수 $y+2$이다.
- $-(5y^2+4y-12)$를 $y+2$로 나눌 때 부호를 틀리는 것. 전개하여 확인하자.

STEP 너머

여러 변수의 다항식은 환(ring)을 이루며, $\mathbb{Z}[x,y]$는 $(\mathbb{Z}[y])[x]$, 즉 계수가 y에 대한 다항식인 x에 대한 다항식들로 볼 수 있다. 이것이 바로 우리가 한 일이며, 인수정리와 나눗셈이 여전히 성립하는 이유이다. 이러한 환에서는 인수분해가 유일하므로(유일 인수분해(unique factorisation), 가우스(Gauss)의 보조정리), 우리가 구한 인수분해는 순서와 부호를 제외하면 유일하다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)에서 이러한 개념을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.