풀이

STEP I 2004, 문제 2

순수수학 • 바닥 함수의 적분

> **STEP I 2004, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q2

핵심 아이디어

함수 $[x]$는 각 구간 $r \leq x < r+1$에서 상수이므로, 이 함수로 만든 것은 모두 계단함수(step function)이다. 계단함수를 적분하는 것은 직사각형의 넓이를 더하는 것일 뿐이다. 즉 $[0, a]$를 정수 지점에서 나누면, 길이가 1인 각 조각에서 피적분함수(integrand)는 상수이다. a가 정수가 아닐 때 새로 생기는 것은 마지막의 폭이 더 좁은 직사각형 하나뿐이다.

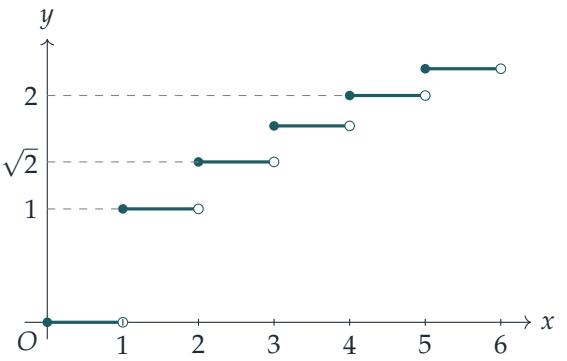
풀이

소문항 (i)

$x \geq 0$일 때 $r = [x]$라 하자. 그러면 r는 음이 아닌 정수이고 $r \leq x < r+1$이므로, 그 구간에서

$$y = \sqrt{[x]} = \sqrt{r}.$$

따라서 그래프는 계단 모양이다. $[0,1)$에서 $y = 0$, $[1,2)$에서 $y = 1$, $[2,3)$에서 $y = \sqrt{2}$이고, 이런 식으로 계속된다. $[x]$는 정확히 각 정수에서 위로 뛰어오르므로, 각 계단은 왼쪽 끝점은 포함하고(속이 찬 점) 오른쪽 끝점은 포함하지 않는다(속이 빈 점). $\sqrt{r+1} - \sqrt{r} = 1/(\sqrt{r+1} + \sqrt{r})$는 감소하므로 계단이 올라가는 높이는 점점 작아진다. $x < 0$이면 $[x] \leq -1$이므로 그곳에서 $\sqrt{[x]}$는 정의되지 않고, 그래프는 $x \geq 0$인 부분에만 있다.



이제 a를 양의 정수라 하자. 적분 구간을 정수 $1, 2, \ldots, a-1$에서 나누면

$$\int_0^a \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} \int_r^{r+1} \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x.$$

$r \le x < r+1$에서 피적분함수는 상수 $\sqrt{r}$와 같다. (한 점 $x = r+1$에서는 다른 값을 갖지만, 함수의 값을 한 점에서 바꾸어도 적분값은 변하지 않는다.) 따라서 각 조각은 폭이 1이고 높이가 $\sqrt{r}$인 직사각형의 넓이이다.

$$\int_r^{r+1} \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x = \sqrt{r}, \qquad \text{따라서} \qquad \int_0^a \sqrt{[x]}\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} \sqrt{r},$$

이므로 요구된 결과를 얻는다.

소문항 (ii)

$r \le x < r+1$에서 2^r와 같은 $2^{[x]}$에 대해서도 정확히 같은 논증이 성립한다. 양의 정수 a에 대하여

$$\int_0^a 2^{[x]}\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} \int_r^{r+1} 2^r\,\mathrm{d}x = \sum_{r=0}^{a-1} 2^r = 1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{a-1}.$$

이것은 첫째항이 1, 공비(common ratio)가 2이고 항이 a개인 등비급수(geometric series)이므로, 그 합은

$$\frac{2^a - 1}{2 - 1} = 2^a - 1,$$

이고, 이것이 요구된 결과이다.

소문항 (iii)

이제 $a > 0$가 정수가 아니라 하고 $n = [a]$로 두자. 그러면 n은 $n < a < n+1$이고 $n \ge 0$인 정수이다.

생각해 보기 적분이 길이 1인 온전한 직사각형들의 합이 아니게 되는 곳은 어디인가?

$x = n$까지는 모든 것이 소문항 (ii)와 같다. 남은 조각은 $n \le x \le a$로, 하나의 계단 안에 놓인 폭 $a - n$인 띠이며, 그곳에서 $[x] = n$이다. ($n = 0$이면 첫 번째 조각은 비어 있고 $2^0 - 1 = 0$을 기여하므로 같은 식이 성립한다.) 그러므로

$$\begin{aligned}\int_0^a 2^{[x]}\,\mathrm{d}x &= \int_0^n 2^{[x]}\,\mathrm{d}x + \int_n^a 2^n\,\mathrm{d}x \\ &= (2^n - 1) + (a - n)\,2^n \\ &= 2^{[a]}(1 + a - [a]) - 1.\end{aligned}$$

검산

- $0 < a < 1$이면 $[a] = 0$이고 식은 $1 \cdot (1 + a) - 1 = a$를 준다. $[0, a]$에서 피적분함수가 1이므로 옳다.
- a가 아래쪽에서 정수 m에 가까워지면 $[a] = m - 1$이고 식은 $2^{m-1} \cdot 2 - 1 = 2^m - 1$에 가까워지며, 이는 소문항 (ii)와 일치한다. 따라서 적분은 a의 연속(continuous)함수이다. 유계(bounded)인 함수의 적분은 위끝에 대하여 반드시 연속이어야 하므로 당연한 결과이다.
- 수치적으로, $a = 2.5$일 때 식은 $4 \times 1.5 - 1 = 5$를 주고, 중점법(midpoint rule)으로 적분을 계산해도 5.000이 나온다. 소문항 (i)에서 $a = 5$이면 양변 모두 $0 + 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 \approx 6.1463$이다.

흔한 실수

- $r = 0$부터 $a - 1$까지가 아니라 $r = 1$부터 a까지 더하는 것. $[r, r + 1)$에서 높이는 **왼쪽** 끝에서의 값인 $\sqrt{r}$이다.
- 소문항 (iii)에서 일부만 남은 띠를 잊거나, 그 폭을 $a - [a]$가 아니라 1로 잡는 것.
- 계단을 세로선으로 이어 그리거나, 양 끝을 모두 속이 찬 점으로 그리는 것. 바닥함수(floor function)는 정수에서 연속이 아니다.

STEP 너머

직사각형을 더하여 계단함수를 적분하는 것은 대학에서 리만 적분(Riemann integral)을 세우는 방식 그대로이다. 먼저 계단함수에 대해 적분을 정의한 다음, 일반적인 함수를 위

아래에서 계단함수로 조여 들어간다. 소문항 (i)은 또한 합과 적분을 비교하는 첫걸음이며, 이를 통해 $\sum_{r=1}^{n} \sqrt{r} \approx \frac{2}{3}n^{3/2}$ 같은 어림을 얻는다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 이런 방식으로 리만 적분을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.