풀이

STEP I 2004, 문제 11

역학 • 마찰과 경첩 사다리

> **STEP I 2004, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q11

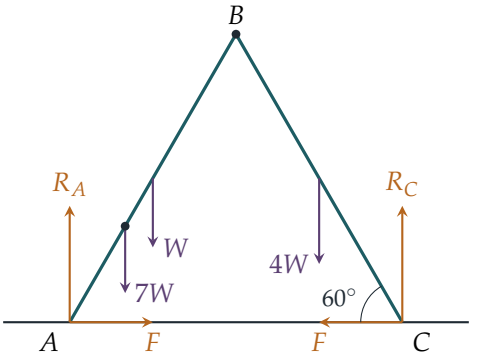
핵심 아이디어

어느 쪽도 미끄러지기 전에는 구조 전체가 평형(equilibrium) 상태이므로, 계 전체를 보고 두 수직항력(normal reaction)을 구하고 사다리 하나만 따로 보고 마찰력(friction)을 구할 수 있다(경첩에 대한 모멘트(moment)를 잡으면 알 수 없는 경첩의 힘이 사라진다). 수평 방향의 외력은 두 마찰력뿐이므로 두 마찰력의 크기는 같다. 수직항력이 **더 작은** 발 쪽이 더 큰 비율 F/R을 필요로 하고, 바로 그 발이 먼저 미끄러진다.

풀이

각 사다리를 길이 $2a$인 균일한 막대(uniform rod)로, B의 경첩을 매끄러운 것으로, 도장공을 질점(particle)으로 모형화한다. $AB = BC$이고 $\angle ABC = 60^\circ$이므로 삼각형 ABC는 정삼각형이다. 즉 $AC = 2a$이고 각 사다리는 지면과 60°를 이룬다. 그러면 B는 각 발에서 수평 거리 a만큼 떨어져 있고, 지면에서 높이 $a\sqrt{3}$인 곳에 있다.

도장공이 AB를 3분의 1만큼 올라갔을 때, 도장공은 A에서 수평 거리 $\frac{1}{3}a$인 곳에 있다. AB의 중심은 A에서 $\frac{1}{2}a$, BC의 중심은 A에서 $\frac{3}{2}a$인 곳에 있다.



수직항력

A와 C에서의 수직항력을 각각 R_A, R_C라 하자. 계 전체에 대해 연직 방향으로 힘을 분해하면

$$R_A + R_C = W + 4W + 7W = 12W.$$

계 전체에 대해 A에 관한 모멘트를 잡으면(경첩의 힘은 내력이므로 나타나지 않는다)

$$R_C \cdot 2a = W \cdot \tfrac{1}{2}a + 7W \cdot \tfrac{1}{3}a + 4W \cdot \tfrac{3}{2}a = \tfrac{53}{6}Wa,$$

이므로

$$R_C = \tfrac{53}{12}W, \qquad R_A = 12W - \tfrac{53}{12}W = \tfrac{91}{12}W.$$

마찰력

두 발은 바깥쪽으로 벌어지려 하므로 각 발의 마찰력은 안쪽을 향한다. 계 전체에 대해 수평 방향으로 힘을 분해하면, 마찰력이 유일한 수평 외력이므로 두 마찰력의 크기는 같다. 이 크기를 F라 하자.

F를 구하려면 사다리 하나만 따로 보아야 한다. 도장공이 없는 BC를 택하고, 알 수 없는 경첩의 힘이 사라지도록 B에 관한 모멘트를 잡는다. B에 대해 수직항력 R_C의 팔 길이(lever arm)는 a, 무게 $4W$의 팔 길이는 $\frac{1}{2}a$, 마찰력 F(지면 높이에서 수평으로 작용)의 팔 길이는 $a\sqrt{3}$이다. 무게와 F는 BC를 한쪽 방향으로 돌리고 R_C는 반대 방향으로 돌리므로

$$R_C \cdot a = 4W \cdot \tfrac{1}{2}a + F \cdot a\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad F = \frac{R_C - 2W}{\sqrt{3}} = \frac{29W}{12\sqrt{3}}.$$

검산으로, AB에 대해 B에 관한 같은 계산을 하면 $R_A \cdot a = W \cdot \frac{1}{2}a + 7W \cdot \frac{2}{3}a + Fa\sqrt{3}$이므로 $F\sqrt{3} = \frac{91}{12}W - \frac{31}{6}W = \frac{29}{12}W$가 되어 일치한다.

어느 사다리가 미끄러지는가?

생각해 보기 두 발의 마찰력이 같은데, 어느 쪽이 먼저 밀려나는지 어떻게 알 수 있을까?

한 발이 미끄러지기 직전인 것은 필요한 마찰력이 그 발에서의 수직항력의 μ배와 같아질 때이다. 두 발 모두 같은 F가 필요하므로, 수직항력이 더 작은 발이 더 큰 비율을 필요로 한다.

$$\frac{F}{R_A} = \frac{29}{91\sqrt{3}} \approx 0.184, \qquad \frac{F}{R_C} = \frac{29}{53\sqrt{3}} \approx 0.316.$$

따라서 C가 먼저 한계 마찰(limiting friction)에 이른다. 도장공은 AB 위에 있는데도, 미끄러지는 것은 **더 무거운 사다리** BC이다. 도장공의 무게는 A를 지면에 단단히 눌러 주는 반면, C는 하중을 훨씬 적게 받는다.

그보다 앞서 미끄러진 곳이 없었는지도 확인해야 한다. 도장공이 비율 t만큼 올라갔다면, 같은 계산으로 $R_C = (\frac{13}{4} + \frac{7}{2}t)W$이고 $F\sqrt{3} = R_C - 2W = (\frac{5}{4} + \frac{7}{2}t)W$이므로

$$\frac{F}{R_C} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\frac{5}{4} + \frac{7}{2}t}{\frac{13}{4} + \frac{7}{2}t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{2}{\frac{13}{4} + \frac{7}{2}t}\right),$$

이고, 이 값은 t에 대해 증가한다. 마찬가지로 F/R_A도 t에 대해 증가한다(분자는 커지고 분모 $R_A = 12W - R_C$는 작아진다). 따라서 도장공이 올라갈수록 필요한 비율은 꾸준히 커지고, 처음 미끄러짐은 정확히 F/R_C가 μ에 이르는 $t = \frac{1}{3}$에서 일어난다. 그러므로

$$\mu = \frac{29}{53\sqrt{3}} = \frac{29\sqrt{3}}{159} \approx 0.316.$$

검산

- AB에 대해 B에 관한 모멘트를 잡아도 BC에 대해 B에 관한 모멘트를 잡은 것과 같은 F가 나오므로(위에서 보였다) 반력들은 서로 모순이 없다.
- 도장공이 전혀 없다면 BC가 더 무거우므로 R_C가 R_A보다 커야 한다. 실제로 이때 A에 관한 모멘트를 잡으면 $R_C = \frac{13}{4}W$, $R_A = \frac{7}{4}W$이고, 합은 $5W$이다.
- $t = \frac{11}{14}$일 때 $R_A = R_C$이다. 이 지점을 넘어서야만 AB가 미끄러지는 쪽이 되므로, $t = \frac{1}{3}$에서는 BC가 미끄러져야 한다.
- 수치적으로, 좌표로부터 모든 힘을 다시 계산하면(두 사다리 모두에 대해 B에 관한 모멘트도 확인하면) $\mu \approx 0.31591$을 얻는다.

흔한 실수

- 도장공이 올라선 사다리가 미끄러진다고 가정하는 것. 도장공의 무게는 A에서의 수직 항력을 키워 그 발을 더 안정되게 만든다.
- 사다리 하나에 대해 발에 관한 모멘트를 잡아, 알 수 없는 경첩의 힘을 끌어들이는 것. 사다리 하나에 대해 B에 관한 모멘트를 잡으면 이를 피할 수 있다.
- 경첩에 대한 마찰력의 팔 길이가 $a\sqrt{3}$(B의 높이)이라는 것을 잊는 것.

STEP 너머

이것이 관절로 이어진 구조물에 대한 정역학(statics)의 기본 전략이다. 먼저 구조 전체를 보고 외부 반력을 구한 다음, 관절에서 구조를 잘라 한 부재가 감당해야 하는 힘을 구한다. 어느 접촉이 먼저 무너지는가 하는 문제는 뼈대 구조(frame)의 해석과, 구속 조건에 맞는 작은 변위를 생각하여 평형을 구하는 가상일의 원리(principle of virtual work)로 이어진다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 강체 정역학과 마찰을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.