풀이

STEP I 2004, 문제 10

역학 • 등가속도 운동

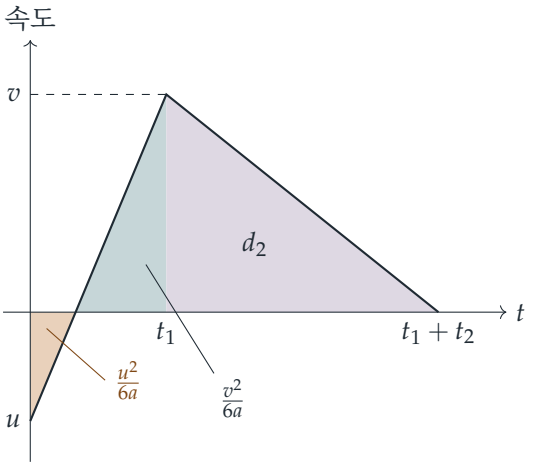
> **STEP I 2004, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q10

핵심 아이디어

이 문제의 모든 운동은 등가속도(constant acceleration) 운동이므로, $v^2 = u^2 + 2as$와 $v = u + at$만으로 모든 계산을 해낼 수 있다. 유일한 함정은 **거리**(distance)라는 낱말이다. $u < 0$이면 입자는 처음에 뒤로 움직이다가 멈추고, 그다음에야 앞으로 속력을 높인다. 따라서 거리 d_1은 하나의 변위(displacement)가 아니라 두 조각의 합이다. 속도-시간 그래프(velocity–time graph)를 그리면 이 점이 선명하게 드러난다. 거리는 그래프와 시간축 사이의 전체 넓이이며, 축 아래에 있는 넓이도 양수로 센다.

풀이

최종 속도 v의 방향을 양의 방향으로 잡는다. 첫 번째 단계에서 가속도는 $+3a$이고(속도를 u에서 $v > u$까지 올리므로), 두 번째 단계에서는 속도가 0이 될 때까지 가속도가 $-a$이다. 전 과정에서 $a > 0$이다.



그래프는 $u < 0$인 경우를 나타낸다. 축 아래의 작은 삼각형이 뒤로 움직인 구간이다.

두 번째 단계(두 경우 공통). 감속도(deceleration) a로 속력 v에서 정지할 때까지 입자는 방향을 바꾸지 않으므로

$$0 = v^2 - 2ad_2 \quad \Longrightarrow \quad d_2 = \frac{v^2}{2a}.$$

소문항 (i)

$u > 0$이면 속도는 u에서 v로 증가하며 계속 양수이므로, 거리는 변위와 같다.

$$v^2 = u^2 + 2(3a)d_1 \quad \Longrightarrow \quad d_1 = \frac{v^2 - u^2}{6a}.$$

따라서

$$3d_1 = \frac{v^2 - u^2}{2a} < \frac{v^2}{2a} = d_2,$$

이다. $u^2 > 0$이기 때문이다. 그러므로 요구한 대로 $3d_1 < d_2$이다.

소문항 (ii)

이제 $u < 0$이고, 첫 번째 단계는 둘로 나뉜다.

? **생각해 보기** 왜 $v^2 = u^2 + 6ad_1$을 다시 그대로 쓸 수 없을까?

그 공식이 주는 것은 **변위** $\frac{v^2-u^2}{6a}$이다. 그런데 입자는 먼저 뒤로 움직인다. 가속도 $3a$로 속력 $|u|$에서 정지할 때까지 느려지면서 $\frac{u^2}{6a}$만큼 이동한다($0 = u^2 - 2(3a)s$에서). 그다음 정지 상태에서 v까지 속력을 높이면서 $\frac{v^2}{6a}$만큼 이동한다. 거리는 이 둘의 합이다.

$$d_1 = \frac{u^2 + v^2}{6a}, \qquad \text{따라서} \qquad 3d_1 = \frac{u^2 + v^2}{2a}.$$

$d_2 = \frac{v^2}{2a}$, $2d_2 = \frac{2v^2}{2a}$와 비교하면 다음과 같다.

- $u \neq 0$이므로 $3d_1 - d_2 = \dfrac{u^2}{2a} > 0$이다.
- $v > |u|$이므로 $2d_2 - 3d_1 = \dfrac{v^2 - u^2}{2a} > 0$이다.

따라서 요구한 대로 $d_2 < 3d_1 < 2d_2$이다.

평균 속력

시간은 방향과 무관하다. 첫 번째 단계에서 속도는 비율 $3a$로 $v - u$만큼 변하고, 두 번째 단계에서는 비율 a로 v만큼 변하므로, u의 부호와 관계없이

$$t_1 = \frac{v-u}{3a}, \qquad t_2 = \frac{v}{a}, \qquad t_1 + t_2 = \frac{4v-u}{3a},$$

이다.

$u > 0$인 경우. 전체 거리는 $\frac{v^2-u^2}{6a} + \frac{3v^2}{6a} = \frac{4v^2-u^2}{6a}$이므로, 평균 속력(average speed)은

$$S_+ = \frac{4v^2-u^2}{6a} \cdot \frac{3a}{4v-u} = \frac{4v^2-u^2}{2(4v-u)}.$$

$u < 0$인 경우. $0 < w < v$인 w에 대하여 $u = -w$로 놓는다. 전체 거리는 $\frac{v^2+w^2}{6a} + \frac{3v^2}{6a} = \frac{4v^2+w^2}{6a}$이고 시간은 $\frac{4v+w}{3a}$이므로

$$S_- = \frac{4v^2+w^2}{2(4v+w)}.$$

두 값을 비교하기 위해 각각을 $\frac{1}{2}v$와 견주어 본다.

$$S_+ - \tfrac{1}{2}v = \frac{4v^2-u^2-v(4v-u)}{2(4v-u)} = \frac{u(v-u)}{2(4v-u)},$$
$$S_- - \tfrac{1}{2}v = \frac{4v^2+w^2-v(4v+w)}{2(4v+w)} = -\frac{w(v-w)}{2(4v+w)}.$$

첫 번째 경우에는 $0 < u < v$이므로 첫 번째 식의 분자와 분모가 모두 양수이고, 따라서 $S_+ > \frac{1}{2}v$이다. 두 번째 경우에는 $0 < w < v$이므로 두 번째 식은 음수이고, 따라서 $S_- < \frac{1}{2}v$이다. 그러므로

$$S_- < \tfrac{1}{2}v < S_+,$$

이고, 요구한 대로 $u > 0$일 때 평균 속력이 더 크다. 이 결과는 두 경우의 $|u|$ 값이 같을 때만이 아니라 어떤 값이든 성립한다는 점에 주목하자. 같은 v와 a에 대하여, $\frac{1}{2}v$는 $u > 0$인 모든 운동과 $u < 0$인 모든 운동을 갈라놓는다.

검산

- $v = 2, a = 1$로 놓는다. $u = 1$이면 $d_1 = \frac{1}{2}, d_2 = 2$이므로 $3d_1 = 1.5 < 2$이고, 시간은 $\frac{7}{3}$이어서 $S_+ = \frac{2.5}{7/3} \approx 1.071 > 1$이다. $u = -1$이면 $d_1 = \frac{5}{6}$이므로 $2 < 3d_1 = 2.5 < 4$이고, 시간은 3이어서 $S_- = \frac{17/6}{3} \approx 0.944 < 1$이다. 운동을 단계별로 수치 시뮬레이션해 보면 이 값들이 그대로 재현된다.
- 극한: $u \to 0$ 또는 $|u| \to v$일 때 두 평균 속력은 모두 $\frac{1}{2}v$로 수렴하는데, 이는 정지 상태에서 출발했다가 다시 멈추는 단순한 운동의 평균 속력이다. 허용된 범위의 끝에서는 부등식도 등식이 된다. 두 소문항 모두에서 $u \to 0$일 때 $3d_1 \to d_2$이고, 소문항 (ii)에서 $u \to -v$일 때 $3d_1 \to 2d_2$이다.

흔한 실수

- 소문항 (ii)에서 $d_1 = \frac{v^2 - u^2}{6a}$을 쓰는 것. 이것은 변위이며, 이를 쓰면 다시 $3d_1 < d_2$가 나와서 보여야 할 결과와 모순된다.
- $u < 0$일 때 시간도 나누어 계산해야 한다고 생각하는 것. 그럴 필요가 없다. $v = u + 3at_1$은 방향이 바뀌는 점을 지나서도 그대로 성립한다.

STEP 너머

변위와 거리의 차이는 $\int v\,\mathrm{d}t$와 $\int |v|\,\mathrm{d}t$의 차이이다. 뒤의 것은 경로의 호의 길이(arc length)이며, 자동차의 주행 거리계가 재는 양이 바로 이것이다. 대학 역학에서는 호의 길이가 곡선 궤적을 기술하는 자연스러운 매개변수가 되며, 이로부터 가속도의 접선 성분과 법선 성분(tangential and normal components)이 나온다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 이런 방식으로 운동학을 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.