풀이

STEP I 2004, 문제 1

순수수학 • 무리수와 세제곱근

> **STEP I 2004, 1번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/04-s1-q1

핵심 아이디어

a, b가 정수일 때 $a + b\sqrt{n}$ 꼴의 수들은 작은 수 체계처럼 행동한다. 이런 수 두 개를 곱하면 같은 꼴의 수가 되고, 이런 두 수는 유리수 부분(rational part)끼리 같고 $\sqrt{n}$ 부분끼리 같을 때, 그리고 그때에만 서로 같다. 소문항 (i)은 이런 수를 세제곱하는 준비 운동이고, 소문항 (ii)는 부분끼리 비교하여 그 과정을 거꾸로 거슬러 올라간다. 소문항 (iii)은 x^3에 대한 이차방정식(quadratic equation)이며, 그 근(root)은 바로 (ii)에서 구한 세제곱들임이 밝혀진다.

풀이

소문항 (i)

이항정리(binomial theorem)에 의해, $(2\sqrt{5})^2 = 20$과 $(2\sqrt{5})^3 = 40\sqrt{5}$를 이용하면

$$\begin{aligned}\left(3 + 2\sqrt{5}\right)^3 &= 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot 2\sqrt{5} + 3 \cdot 3 \cdot 20 + 40\sqrt{5} \\ &= 27 + 54\sqrt{5} + 180 + 40\sqrt{5} \\ &= 207 + 94\sqrt{5}.\end{aligned}$$

따라서 $a = 207$, $b = 94$이다.

소문항 (ii)

$\sqrt{5}$ 대신 $\sqrt{2}$를 넣어 같은 방식으로 전개하면, 임의의 c와 d에 대하여

$$\begin{aligned}\left(c - d\sqrt{2}\right)^3 &= c^3 - 3c^2d\sqrt{2} + 3c \cdot 2d^2 - 2d^3\sqrt{2} \\ &= \left(c^3 + 6cd^2\right) - \left(3c^2d + 2d^3\right)\sqrt{2}.\end{aligned}$$

실수 세제곱근(cube root)은 유일하므로, $(c - d\sqrt{2})^3 = 99 - 70\sqrt{2}$가 성립해야 한다.

> **생각해 보기** 왜 유리수 부분과 $\sqrt{2}$ 부분을 따로따로 비교해도 되는가?

p, q, r, s가 정수이고 $q \neq s$일 때 $p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$라면, $\sqrt{2} = (p - r)/(s - q)$가 유리수가 되는데, 이는 사실이 아니다. 따라서 $q = s$이고, 그러면 $p = r$이다. 그러므로

$$c^3 + 6cd^2 = 99, \qquad 3c^2d + 2d^3 = 70.$$

이 성립해야 한다. c와 d는 양수이므로 첫 번째 식에서 $c^3 < 99$가 되어야 하고, 따라서 $c \leq 4$이다. $6cd^2 = 99 - c^3$에 각 값을 대입해 보면

- $c = 1$: $6d^2 = 98$, 정수해가 없다.
- $c = 2$: $12d^2 = 91$, 없다.
- $c = 3$: $18d^2 = 72$, 따라서 $d = 2$이다.
- $c = 4$: $24d^2 = 35$, 없다.

가능한 후보는 $c = 3, d = 2$뿐이며, 이는 두 번째 식도 만족한다: $3 \cdot 9 \cdot 2 + 2 \cdot 8 = 54 + 16 = 70$. 그러므로

$$\sqrt[3]{99 - 70\sqrt{2}} = 3 - 2\sqrt{2}, \qquad c = 3,\ d = 2.$$

이다. (부호를 점검해 보면, $2\sqrt{2} \approx 2.83 < 3$이므로 $3 - 2\sqrt{2}$는 양수이고, 이는 $99 - 70\sqrt{2} \approx 0.005$가 양수라는 사실과 맞아떨어진다.)

소문항 (iii)

$y = x^3$으로 놓자. 방정식은 $y^2 - 198y + 1 = 0$이 되므로, $9800 = 4900 \cdot 2$를 이용하면

$$y = \frac{198 \pm \sqrt{198^2 - 4}}{2} = 99 \pm \sqrt{99^2 - 1} = 99 \pm \sqrt{9800} = 99 \pm 70\sqrt{2},$$

이다. 두 값 모두 양의 실수이다.

소문항 (ii)에서 $99 - 70\sqrt{2} = (3 - 2\sqrt{2})^3$이다. 다른 근에 대해서는, 이차방정식의 두 근의 곱이 1임에 주목하면

$$99 + 70\sqrt{2} = \frac{1}{99 - 70\sqrt{2}} = \frac{1}{(3 - 2\sqrt{2})^3} = \left(3 + 2\sqrt{2}\right)^3,$$

이다. 여기서 $(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2}) = 9-8 = 1$을 이용하였다. (마찬가지로, 소문항 (ii)의 전개식에서 d의 부호를 바꾸면 $(3+2\sqrt{2})^3 = 99+70\sqrt{2}$를 곧바로 얻는다.)

모든 실수는 실수 세제곱근을 정확히 하나 가지므로, y의 각 값은 실수 x를 정확히 하나씩 준다. 두 실수해는

$$x = 3-2\sqrt{2} \qquad \text{그리고} \qquad x = 3+2\sqrt{2}.$$

이다. 이 6차방정식(sextic equation)의 나머지 네 해는 복소수(complex number)이며, 각 y의 나머지 세제곱근들이다.

검산

- 수치로 계산하면 $(3+2\sqrt{5})^3 \approx 417.19$이고 $207+94\sqrt{5} \approx 417.19$이다.
- $3+2\sqrt{2} \approx 5.8284$이며, 이 값에서 $x^6 - 198x^3 + 1$은 반올림 오차 범위 안에서 영이 된다. $3-2\sqrt{2} \approx 0.1716$에서도 마찬가지이다.
- (iii)의 두 답을 곱하면 당연히 1이 된다. x가 근이면 $1/x$도 근인데, 방정식을 x^6으로 나누면 $1/x$에 대한 같은 방정식이 되기 때문이다.

흔한 실수

- 전개할 때 $(d\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}\,d^3$이지 $\sqrt{2}\,d^3$이 아니라는 것을 잊는다.
- 첫 번째 식에서 $c = 3, d = 2$를 찾고 나서 두 번째 식을 확인하지 않는다.
- (iii)에서 "해"를 여섯 개 제시한다. 각 양수의 세제곱근 중 실수인 것은 하나뿐이다.

STEP 너머

a, b가 정수인 수 $a+b\sqrt{2}$ 전체의 집합은 환(ring)이며 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$로 나타낸다. $3+2\sqrt{2}$는 이 환의 **단원**(*unit*)이다. 즉 같은 환 안에 역원(inverse) $3-2\sqrt{2}$를 가진다. 이런 단원들은 펠 방정식(Pell's equation) $a^2 - 2b^2 = \pm 1$과 밀접하게 연결되어 있으며($99^2 - 2\cdot 70^2 = 1$임에 주목하라), $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$의 모든 단원은 $\pm(1+\sqrt{2})^n$ 꼴이다. 더 알아보려면 Davenport의 *The Higher Arithmetic*(고등 정수론), 또는 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.