풀이

STEP III 2003, 문제 9

역학 • 평형의 안정성

STEP III 2003, 9번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s3-q9

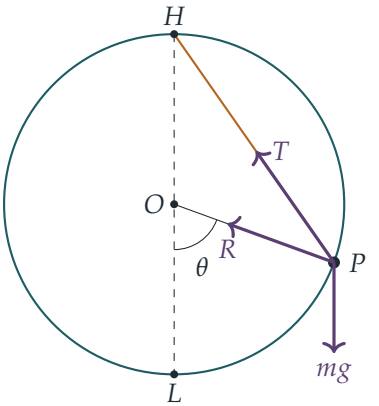
핵심 아이디어

철사는 매끄러우므로 철사의 반작용(reaction)은 항상 반지름 방향으로 작용하고 일을 하지 않는다. 따라서 모든 일은 **접선**(*tangential*) 방향에서 일어난다. 장력과 무게를 접선 방향으로 분해하면 $\ddot{\theta}$에 대한 하나의 방정식을 얻고, 이 방정식이 평형 위치와 작은 진동을 모두 알려 준다. 필요한 각은 모두 이등변삼각형 OHP의 기하에서 나온다.

풀이

설정

P를 매끄러운 철사 위의 입자로 모형화하면, 철사가 주는 반작용 R은 PO 방향으로 작용한다. 줄은 가볍고 훅의 법칙(Hooke's law)을 따른다. $0 < \theta < \pi$로 두어 P가 연직 지름 LH의 한쪽에 있도록 한다.



$OH = OP = a$이므로 삼각형 OHP는 $\angle HOP = \pi - \theta$인 이등변삼각형이고, 따라서 두 밑각은

$$\angle OHP = \angle OPH = \tfrac{1}{2}\theta, \qquad HP = 2a\cos\tfrac{1}{2}\theta.$$

이다. 줄은 $HP > a$일 때, 즉 $\cos\frac{1}{2}\theta > \frac{1}{2}$일 때 팽팽하며, 이때 훅의 법칙에 의해

$$T = \frac{\alpha mg}{a}(2a\cos\tfrac{1}{2}\theta - a) = \alpha mg(2\cos\tfrac{1}{2}\theta - 1).$$

이다.

이제 P에서의 접선을 따라 θ가 증가하는 방향(H 쪽)으로 힘을 분해한다. 줄은 PO와 각 $\frac{1}{2}\theta$를 이루므로 이 접선과는 각 $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\theta$를 이루고, 줄의 장력의 접선 성분은 $T\sin\frac{1}{2}\theta$이다. 무게의 접선 성분은 $-mg\sin\theta$이고, R의 접선 성분은 없다. 접선 가속도가 $a\ddot{\theta}$이므로

$$\begin{aligned} ma\ddot{\theta} &= T\sin\tfrac{1}{2}\theta - mg\sin\theta \\ &= mg\left[\alpha(2\cos\tfrac{1}{2}\theta - 1)\sin\tfrac{1}{2}\theta - 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta\right], \end{aligned}$$

이고, 따라서 줄이 팽팽한 동안

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{a}\sin\tfrac{1}{2}\theta\left[2(\alpha - 1)\cos\tfrac{1}{2}\theta - \alpha\right]. \qquad (*)$$

이다. (같은 방정식을 에너지 $\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - mga\cos\theta + \frac{1}{2}\alpha mga(2\cos\frac{1}{2}\theta - 1)^2$을 미분하여 얻을 수도 있다.)

평형 위치

평형(equilibrium)에서는 $\ddot{\theta} = 0$이다. $0 < \theta < \pi$에서는 $\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$이므로

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \frac{\alpha}{2(\alpha - 1)},$$

이어야 하고, $\alpha > 1$이므로 이 식은 의미가 있다. 이것이 $0 < \theta < \pi$를 주려면 $0 < \cos\frac{1}{2}\theta < 1$이어야 한다. 이 값은 양수이고,

$$\frac{\alpha}{2(\alpha - 1)} < 1 \iff \alpha < 2\alpha - 2 \iff \alpha > 2.$$

이다. 또한 $(*)$에서 가정한 대로 그 위치에서 줄이 팽팽해야 한다. 즉 $\frac{\alpha}{2(\alpha-1)} > \frac{1}{2} \iff \alpha > \alpha - 1$이어야 하는데, 이는 항상 참이다. 따라서 $\alpha > 2$이면 $0 < \theta < \pi$인 평형 위치가 존재하며, 이것이 보이려던 것이다.

생각해 보기 평형 위치에서 줄이 느슨하다면 어떻게 될까?

그렇다면 접선 성분을 가진 힘은 중력뿐이고, $-mg\sin\theta = 0$은 $0 < \theta < \pi$에서 해가 없다. 그래서 우리가 찾은 평형 위치가 자동으로 $\cos\frac{1}{2}\theta > \frac{1}{2}$를 만족한다는 사실이 중요하다.

$\alpha = 2+\sqrt{2}$일 때의 작은 진동

이제

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \frac{2+\sqrt{2}}{2(1+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

이므로 평형 위치는 $\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{4}\pi$, 즉 $\theta = \frac{1}{2}\pi$이고, 이때 P는 O와 같은 높이에 있다. $\theta = \frac{1}{2}\pi + \phi$로 두면 $\ddot{\theta} = \ddot{\phi}$이다. $(*)$를 $\ddot{\theta} = \frac{g}{a}f(\theta)$로 쓰면 $f(\frac{1}{2}\pi) = 0$이다. ϕ가 작을 때

$$f(\tfrac{1}{2}\pi + \phi) \approx f'(\tfrac{1}{2}\pi)\,\phi.$$

이다. $(*)$의 대괄호 부분이 $\theta = \frac{1}{2}\pi$에서 0이 되므로, 곱의 미분법을 적용하면 한 항만 남는다.

$$f'(\tfrac{1}{2}\pi) = \sin\tfrac{1}{4}\pi \cdot \left[-2(\alpha-1)\cdot\tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{4}\pi\right] = -(\alpha-1)\sin^2\tfrac{1}{4}\pi = -\frac{\alpha-1}{2} = -\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

따라서 ϕ가 작을 때

$$\ddot{\phi} \approx -\frac{g(\sqrt{2}+1)}{2a}\,\phi$$

이며, 이것이 보이려던 것이다.

마지막 부분

ϕ의 계수가 음수이므로, 작은 변위를 주면 입자는 $\theta = \frac{1}{2}\pi$를 중심으로 (근사적으로) 단진동(simple harmonic motion)을 한다. 즉 이 평형은 안정(stable)하다. 각진동수는 $\omega = \sqrt{g(\sqrt{2}+1)/(2a)}$이므로 주기는

$$\frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2a}{(\sqrt{2}+1)g}} = 2\pi\sqrt{\frac{2(\sqrt{2}-1)a}{g}},$$

이고, 에너지가 보존되므로 진폭은 계속 작게 유지된다(철사는 매끄럽고 줄은 탄성체이므로 에너지를 소산시키는 것이 없다).

검산

- $\alpha = 2$이면 평형 위치 공식에서 $\cos\frac{1}{2}\theta = 1$, 즉 $\theta = 0$이 된다. 평형 위치가 최저점과 겹치게 되므로 조건 $\alpha > 2$와 잘 맞는다.
- $\alpha \to \infty$이면 $\cos\frac{1}{2}\theta \to \frac{1}{2}$이므로 $\theta \to \frac{2}{3}\pi$이고 $HP \to a$이다. 매우 뻣뻣한 줄은 거의 늘어나지 않는다.
- $a = 1.3\,\mathrm{m}$, $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$로 두고 $\phi = 0.01$에서 시작하여 전체 방정식 $(*)$를 수치적으로 풀면 주기가 약 $2.0819\,\mathrm{s}$로 나오며, 이는 $2\pi\sqrt{2(\sqrt{2}-1)a/g} \approx 2.0818\,\mathrm{s}$와 일치한다.

흔한 실수

- $HP = 2a\sin\frac{1}{2}\theta$로 쓰는 것: 이것은 HP가 아니라 현 LP의 길이이다. 삼각형 OHP에서 O에서의 각은 $\pi - \theta$이다.
- 평형 위치에서 줄이 팽팽한지 확인하지 않는 것: 느슨한 줄에는 장력이 없다.
- 접선 방향 대신 반지름 방향으로 분해하는 것: 반지름 방향의 방정식에는 미지의 반작용 R이 들어가고, $\ddot{\theta}$에 대해서는 아무것도 알려 주지 않는다.

STEP 너머

평형 위치 근처에서 $\ddot{\phi} \approx f'(\theta_0)\,\phi$로 선형화(linearisation)하는 것은 모든 동역학계의 안정성을 연구할 때 표준적인 첫 단계이다. $f'(\theta_0)$의 부호(위치 에너지에 대해서는 동등하게 $V''(\theta_0)$의 부호)가 진동할지 아니면 멀어져 버릴지를 결정한다. 대학 1학년 과정에서 이 내용은 비선형 상미분방정식의 상평면 분석(phase-plane analysis)으로 발전한다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 위치 에너지를 이용하여 안정 평형 근처의 작은 진동을 매우 명료하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.