풀이

# STEP III 2003, 문제 8

순수수학 • 일계 미분방정식

> **STEP III 2003, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q8

## 핵심 아이디어

소문항 (i)은 음함수 미분(implicit differentiation) 문제이지만, 사실은 한 가지 기법을 보여 주는 예제이다. 곡선족(family of curves) $(y+ax)^n(y+bx)=c$의 기울기(gradient)는 $x$와 $y$에 대한 두 일차식의 비로 나타난다는 것이다. 소문항 (ii)는 이 기법을 거꾸로 적용한다. 일반적인 곡선족을 미분하여 기울기를 $a$, $b$, $n$으로 나타낸 다음, 주어진 방정식과 일치하도록 이 값들을 정한다. 일단 일치하면 그 식은 모든 해곡선(solution curve)을 따라 일정하고, 이 일정한 관계가 바로 일반해(general solution)이다.

## 풀이

### 소문항 (i)

곱의 미분법(product rule)과 연쇄법칙(chain rule)을 이용하여 $(y+2x)^3(y-4x)=c$를 $x$에 대하여 미분하고, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$를 $y'$으로 쓰자.

$$3(y+2x)^2(y'+2)(y-4x)+(y+2x)^3(y'-4)=0.$$

$y+2x\neq 0$인 점에서는 $(y+2x)^2$으로 나눌 수 있다.

$$3(y'+2)(y-4x)+(y+2x)(y'-4)=0.$$

$y'$이 있는 항을 모으면

$$y'[3(y-4x)+(y+2x)]=-6(y-4x)+4(y+2x),$$
$$y'(4y-10x)=32x-2y,$$

이고, 분자와 분모를 2로 나누면

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{16x - y}{2y - 5x},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다. (직선 $y = -2x$ 위에서는 곡선의 $c = 0$이며, 이때에도 이 공식은 올바른 기울기 $-2$를 준다.)

**소문항 (ii)**

$y$가 $x$의 함수일 때 $F = (y + ax)^n(y + bx)$라 하자. 소문항 (i)과 똑같이 하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} &= n(y + ax)^{n-1}(y' + a)(y + bx) + (y + ax)^n(y' + b) \\ &= (y + ax)^{n-1}\Big[\, y'((n+1)y + (nb + a)x) + (na + b)y + (n+1)ab\,x\Big].\end{aligned}$$

따라서 $y = -ax$를 벗어난 곳에서, 곡선을 따라 $F$가 일정할 필요충분조건은

$$y' = -\frac{(na + b)y + (n+1)ab\,x}{(n+1)y + (nb + a)x}. \qquad (*)$$

이다. (소문항 (i)은 $a = 2, b = -4, n = 3$인 경우로, $(32x - 2y)/(4y - 10x)$를 준다.)

> **생각해 보기** 분수는 여러 가지 방법으로 쓸 수 있는데, $(*)$를 $\dfrac{10x - 4y}{3x - y}$와 어떻게 맞출 수 있을까?

분수는 분자와 분모에 같은 수를 곱해도 변하지 않으므로, 두 식은 공통 인수를 제외하고서만 맞출 수 있다. 목표 식을 $-(4y - 10x)/(y - 3x)$로 쓰고, 분모의 $y$의 계수가 같아지도록 분자와 분모에 $k = n + 1$을 곱한다. 그러면 다음이 성립해야 한다.

$$na + b = -4(n+1), \qquad (n+1)ab = 10(n+1), \qquad nb + a = -3(n+1).$$

$n + 1 \neq 0$이므로 (만약 $n = -1$이면 $(*)$의 분모에 $y$항이 없다) 가운데 식에서 $ab = 10$을 얻는다. 바깥쪽 두 식을 더하면 $(n+1)(a+b) = -7(n+1)$이므로 $a + b = -7$이다. 따라서 $a$와 $b$는 $t^2 + 7t + 10 = 0$의 두 근, 즉 $-2$와 $-5$이다. 바깥쪽 두 식을 빼면

$$(n-1)(a-b) = -(n+1).$$

- $a = -5, b = -2$이면 $-3(n-1) = -(n+1)$이므로 $n = 2$이다.
- $a = -2, b = -5$이면 $3(n-1) = -(n+1)$이므로 $n = \frac{1}{2}$이다.

$(y - 2x)^{1/2}(y - 5x) = c$를 제곱하면 $(y - 5x)^2(y - 2x) = c^2$이 되므로 두 선택은 같은 곡선들을 나타낸다. 제곱근을 피할 수 있도록 $n = 2$를 택한다.

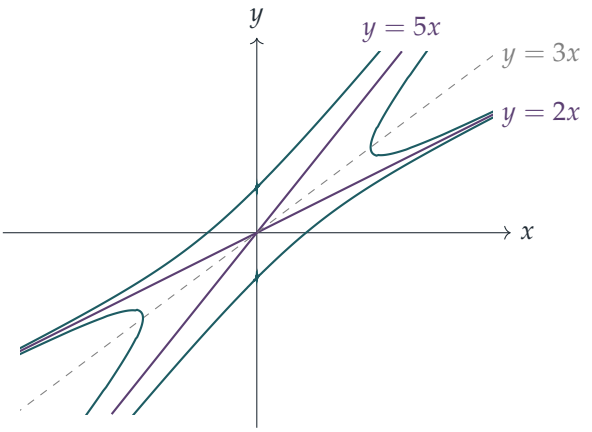
확실히 하기 위해 직접 확인해 보자. $G = (y-5x)^2(y-2x)$라 하면

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x} &= (y-5x)\big[2(y'-5)(y-2x) + (y-5x)(y'-2)\big] \\ &= (y-5x)\big[3y'(y-3x) - 12y + 30x\big] \\ &= 3(y-5x)\big[y'(y-3x) - (4y-10x)\big].\end{aligned}$$

$y$가 미분방정식(differential equation)을 만족하면 $y'(y-3x) = 4y-10x$이므로 대괄호 안이 사라지고 $\mathrm{d}G/\mathrm{d}x = 0$이다. 따라서 $G$는 모든 해곡선 위에서 일정하며, 일반해는

$$\boxed{(y-5x)^2(y-2x) = C}$$

이다. 여기서 $C$는 임의의 상수이다. $C = 0$인 경우는 직선 $y = 5x$와 $y = 2x$를 준다. 이 둘은 실제로 해이다. $y = 2x$ 위에서 우변은 $2x/x = 2$이고, $y = 5x$ 위에서는 $(-10x)/(-2x) = 5$이다. 모든 곡선은 방정식이 정의되지 않는 직선 $y = 3x$와 만나는 곳에서 수직 접선(vertical tangent)을 가진다.




곡선 $(y-5x)^2(y-2x) = \pm 1$(청록색)과 $C = 0$인 직선 해(자주색). 두 직선 사이에 있는 가지들은 점선 $y = 3x$와 만나는 곳에서 수직 접선을 가진다.

### 소문항 (ii)의 다른 풀이

우변은 $y/x$에만 의존하므로 치환(substitution) $y = vx$를 써도 된다. 그러면

$$x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{(v-2)(v-5)}{3-v},$$

을 얻고, 변수분리(separation of variables)와 부분분수(partial fractions)를 이용하면 $\ln|x| = -\frac{1}{3}\ln|v-2| - \frac{2}{3}\ln|v-5| +$ 상수에 이르며, 이를 정리하면 같은 답이 나온다. 문제에서 제시한 방법을 쓰면 부분분수를 피할 수 있다.

## 검산

- 소문항 (i)은 $(*)$에 대한 검산을 담고 있다. $(*)$에 $a = 2, b = -4, n = 3$을 대입하면 그곳에서 구한 기울기가 다시 나온다.
- 점 $(1, 0)$에서 방정식은 기울기 $10/3$을 준다. 그 점에서 $(y - 5x)^2(y - 2x) = C$를 음함수 미분하면 $(-5)\left[2(y' - 5)(-2) + (-5)(y' - 2)\right] = 0$이므로 $-9y' + 30 = 0$, 즉 $y' = 10/3$이다.
- 수치적으로, 무작위로 고른 쉰 개의 시작점에서 룽게-쿠타 방법(Runge–Kutta method)으로 미분방정식을 단계적으로 풀었다. 각 경로를 따라 $(y - 5x)^2(y - 2x)$의 값은 약 $10^{-13}$ 이내로 일정하게 유지되었다.

## 흔한 실수

- 공통 인수 없이 $(*)$의 계수를 $10x - 4y$와 $3x - y$에 직접 맞추는 것. 그러면 모순된 방정식들이 나온다.
- 같은 곡선족이라는 것을 알아차리지 못하고 답을 $(y - 2x)^{1/2}(y - 5x) = c$로 남겨 두는 것. 또한 부호를 주의 깊게 다루지 않으면 $y < 2x$인 해들을 잃게 된다.
- $C = 0$도 허용된다는 것을 잊는 것. 이 경우가 직선 해 $y = 2x$와 $y = 5x$를 준다.

## STEP 너머

여기서 다룬 방정식은 **동차**(*homogeneous*) 방정식이다. 즉, 우변이 $y/x$에만 의존한다. 해를 따라 일정한 함수 $G(x, y)$를 찾는 것은 **완전미분방정식**(*exact equations*)과 **적분인자**(*integrating factors*)의 바탕이 되는 아이디어이다. 역학에서 같은 아이디어는 에너지와 같은 보존량(conserved quantities)을 찾는 일이다. 두 가지 모두 Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식) 앞부분에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.