풀이

STEP III 2003, 문제 7

순수수학 • 심슨 선

> **STEP III 2003, 7번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q7

핵심 아이디어

수선의 발(foot of the perpendicular)은 P에서 직선의 법선(normal) 방향으로 걸어가다가 직선과 만나는 점이므로, $N = P + \lambda$(법선)으로 놓고 λ를 구한다. 두 번째 부분에서 s와 t에 대한 조건은 두 기울기(gradient)의 곱이 -1이라는 것이다. 즉 PA와 PB가 수직이라는 뜻이다. 이 조건을 원의 방정식으로 바꾸면, 바로 그 식 덕분에 세 점이 한 직선 위에 있음(collinearity)을 확인하는 계산이 깔끔하게 정리된다.

풀이

N의 좌표

직선 AB의 방정식은 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, 즉

$$bx + ay = ab.$$

이다. 이 직선의 법선벡터는 (b, a)이므로, P에서 내린 수선의 발 N은 어떤 λ에 대하여

$$N = (s + \lambda b,\ t + \lambda a)$$

의 꼴이다. N이 AB 위에 있으므로

$$b(s + \lambda b) + a(t + \lambda a) = ab \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \frac{ab - bs - at}{a^2 + b^2}.$$

따라서

$$x = s + \lambda b = \frac{s(a^2 + b^2) + ab^2 - b^2 s - abt}{a^2 + b^2} = \frac{ab^2 - abt + a^2 s}{a^2 + b^2} = \frac{ab^2 - a(bt - as)}{a^2 + b^2},$$

$$y = t + \lambda a = \frac{t(a^2 + b^2) + a^2 b - abs - a^2 t}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b + b^2 t - abs}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 b + b(bt - as)}{a^2 + b^2},$$

이므로 원하는 결과를 얻는다.

N은 XY 위에 있다

먼저 조건이 무엇을 말하는지 살펴보자. 조건이 의미를 가지려면 $s \neq 0$이고 $s \neq a$이어야 하며, 곱이 0이 아니라 -1이므로 $t \neq 0$이고 $t \neq b$이기도 하다. 식을 전개하면

$$t(t-b) = -s(s-a) \quad \Longleftrightarrow \quad s^2 + t^2 = as + bt. \tag{$*$}$$

이제 $X = (s, 0)$, $Y = (0, t)$이다. $s \neq 0$이고 $t \neq 0$이므로 이 두 점은 원점이 아닌 서로 다른 점이며, 직선 XY는

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = 1, \qquad \text{즉} \qquad tx + sy = st.$$

이다. 따라서 N의 좌표에 대하여 $tx + sy = st$임을 보이면 된다.

> **생각해 보기** 그냥 대입하고 잘되기를 바랄 것인가, 아니면 계산을 깔끔하게 정리하는 방법이 있을까?

식을 짧게 쓰기 위해 $k = bt - as$로 놓자. 위의 공식을 이용하면

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(tx+sy) &= t(ab^2 - ak) + s(a^2b + bk) \\ &= ab^2t + a^2bs + k(bs - at).\end{aligned}$$

마지막 곱은 깔끔하게 전개된다.

$$k(bs-at) = (bt-as)(bs-at) = b^2st - abt^2 - abs^2 + a^2st = (a^2+b^2)st - ab(s^2+t^2).$$

그러므로

$$(a^2+b^2)(tx+sy) = (a^2+b^2)st + ab(as + bt - s^2 - t^2).$$

이 식은 모든 P에 대하여 성립한다. $(*)$에 의해 괄호 안은 0이므로 $tx + sy = st$이고, N은 직선 XY 위에 있다.

기하학적 해석

PB의 기울기는 $\dfrac{t-b}{s}$이고 PA의 기울기는 $\dfrac{t}{s-a}$이므로, 조건은 $PA \perp PB$, 즉 각 APB가 직각이라는 뜻이다. 같은 말로, $(*)$는

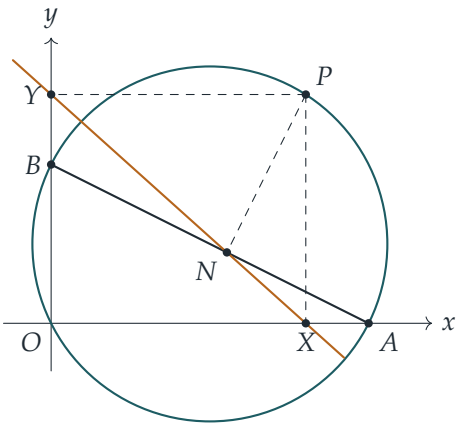
$$\left(s - \tfrac{a}{2}\right)^2 + \left(t - \tfrac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{4},$$

이므로 P는 AB를 지름으로 하는 원 위에 있다. 각 AOB 역시 직각이므로 이 원은 O를 지난다. 즉 이 원은 **삼각형 OAB의 외접원**(*circumcircle*)이다.

점 X, Y, N은 P에서 삼각형의 세 변 OA, OB, AB에 내린 수선의 발이다. 따라서 이 결과는 다음을 말한다.

P가 삼각형의 외접원 위에 있으면, P에서 세 변(필요하면 연장한 변)에 내린 수선의 발은 한 직선 위에 있다.

이것이 심슨 선(*Simson line*) 정리이며, 여기서는 직각이 원점에 오도록 놓인 직각삼각형에 대하여 증명한 것이다.



$a = 4$, $b = 2$인 경우: P는 O, A, B를 지나는 원 위에 있고, 직선 XY(호박색)는 N을 지난다.

검산

- $P = O$, 즉 $s = t = 0$으로 놓으면 공식은 $N = \left(\frac{ab^2}{a^2+b^2}, \frac{a^2b}{a^2+b^2}\right)$을 준다. 이 점은 $bx + ay = ab$ 위에 있고, O를 지나고 AB에 수직인 직선 $y = \frac{a}{b}x$ 위에도 있으므로 예상대로이다.
- $a = 4$, $b = 2$이고 원 위의 점 $P = (2 + \sqrt{5}\cos 1,\ 1 + \sqrt{5}\sin 1) \approx (3.208, 2.882)$에 대하여 공식은 $N \approx (2.214, 0.893)$을 주며, $\frac{2.214}{3.208} + \frac{0.893}{2.882} \approx 0.690 + 0.310 = 1$이므로 N은 XY 위에 있다.
- 항등식 $(a^2 + b^2)(tx + sy - st) = ab(as + bt - s^2 - t^2)$으로부터 역(converse)도 얻는다. 즉 P가 좌표축 위에 있지 않을 때, N이 XY 위에 있는 것은 P가 원 위에 있을 때뿐이다.

흔한 실수

- AB의 법선으로 (a, b)를 쓰는 것. AB의 방향은 $(-a, b)$이므로 법선은 (b, a)이다.
- 모든 것을 한꺼번에 전개하다가 계산에 파묻히는 것. 주어진 답이 암시하듯 $bt - as$를 하

나의 기호로 묶으면 계산이 몇 줄로 끝난다.

- "각 APB가 직각이다"에서 멈추는 것. 문제가 원하는 해석은 심슨 선이다. 즉 X, Y, N은 삼각형 OAB의 세 변에 내린 수선의 발이다.

STEP 너머

심슨 선은 모든 삼각형에 대하여 성립하며, 종합적 증명에서는 원에 내접하는 사각형(cyclic quadrilateral)과 같은 호에 대한 원주각이 같다는 성질을 이용한다. 그 역도 참이며, P가 외접원을 따라 움직일 때 심슨 선들의 포락선(envelope)은 델토이드(deltoid, 슈타이너(Steiner)의 내사이클로이드)가 된다. 좌표나 복소수를 이용한 방법은 이런 결과를 기계적인 계산으로 만든다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석)는 복소수가 원의 기하를 얼마나 우아하게 다루는지 보여 주며, 콕서터(Coxeter)와 Greitzer의 *Geometry Revisited*(기하학 다시 보기)는 심슨 선을 비롯한 고전적인 삼각형 기하를 폭넓게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.