풀이

# STEP III 2003, 문제 6

순수수학 • 삼각함수의 망원합

> **STEP III 2003, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q6

## 핵심 아이디어

각이 같은 간격으로 커지는 코사인들의 합은 그대로 두면 다루기 어렵지만, 모든 항에 $2\sin\frac{1}{2}\theta$를 곱하면 각 코사인이 두 사인의 **차**로 바뀌고, 그러면 합이 연쇄적으로 소거된다(telescoping). 남는 것은 두 사인의 차이며, 이것은 합차 공식(factor formula)으로 곱으로 바꿀 수 있다. 곱이 영이 되는 조건을 찾는 것은 쉽다. 단 하나 조심할 점은 우리가 곱한 $\sin\frac{1}{2}\theta$ 자체가 영이 될 수 있다는 것이다.

## 풀이

### 항등식(identity)

$A = r\theta$, $B = \frac{1}{2}\theta$로 두고 $\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2\cos A \sin B$를 쓰면

$$\sin\left(r+\tfrac{1}{2}\right)\theta - \sin\left(r-\tfrac{1}{2}\right)\theta = 2\cos r\theta \, \sin\tfrac{1}{2}\theta,$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

### 급수(series)의 합 구하기

다음과 같이 두자.

$$S(\theta) = \sum_{r=a}^{b-1} \cos r\theta.$$

양변에 $2\sin\frac{1}{2}\theta$를 곱하고 $a$부터 $b-1$까지의 각 $r$에 대하여 항등식을 쓰면

$$\begin{aligned} 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\ S(\theta) &= \sum_{r=a}^{b-1}\Big[\sin(r+\tfrac{1}{2})\theta - \sin(r-\tfrac{1}{2})\theta\Big] \\ &= \sin(b-\tfrac{1}{2})\theta - \sin(a-\tfrac{1}{2})\theta, \end{aligned}$$

이다. 각 $\sin(r+\frac{1}{2})\theta$가 다음 항의 $-\sin((r+1)-\frac{1}{2})\theta$와 상쇄되어, 마지막 항의 위쪽 끝과 첫 항의 아래쪽 끝만 남기 때문이다.

이제 $\frac{P+Q}{2} = \frac{1}{2}(a+b-1)\theta$, $\frac{P-Q}{2} = \frac{1}{2}(b-a)\theta$로 두고 $\sin P - \sin Q = 2\cos\frac{P+Q}{2}\sin\frac{P-Q}{2}$를 쓰면

$$\sin\tfrac{1}{2}\theta\ S(\theta) = \cos\tfrac{1}{2}(a+b-1)\theta\ \sin\tfrac{1}{2}(b-a)\theta. \qquad (*)$$

**$S(\theta)=0$ 풀기**

> ? **생각해 보기** $(*)$를 그냥 $\sin\frac{1}{2}\theta$로 나누어도 될까?

$\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$일 때, 즉 $\theta$가 $2\pi$의 배수가 아닐 때에만 그렇다. 그러므로 그런 값들을 먼저 처리한다. 정수 $m$에 대하여 $\theta = 2m\pi$이면 모든 항 $\cos r\theta$가 1이므로 $S(\theta) = b-a \geq 2$이다. 이 값들은 결코 해가 아니다.

그 밖의 모든 $\theta$에 대해서는 $\sin\frac{1}{2}\theta \neq 0$이고, $(*)$에 의하여

$$S(\theta) = 0 \iff \cos\tfrac{1}{2}(a+b-1)\theta = 0 \text{ 또는 } \sin\tfrac{1}{2}(b-a)\theta = 0.$$

- $\cos\frac{1}{2}(a+b-1)\theta = 0$일 필요충분조건은 $\frac{1}{2}(a+b-1)\theta = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$, 즉

  $$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{a+b-1}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

  이다. ($a+b-1 \geq 3$이므로 영으로 나누는 것이 아님에 주의한다.) 이 값들 중 어느 것도 $2\pi$의 배수가 아니다. 그러려면 $2k+1 = 2m(a+b-1)$이어야 하는데, 이는 홀수가 짝수와 같다는 뜻이기 때문이다. 따라서 이 값들은 모두 해이다.

- $\sin\frac{1}{2}(b-a)\theta = 0$일 필요충분조건은 $\frac{1}{2}(b-a)\theta = k\pi$, 즉

  $$\theta = \frac{2k\pi}{b-a}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

  이다. 이 값이 $2\pi$의 배수가 되는 것은 정확히 $b-a$가 $k$를 나눌 때이고, 그런 값들은 해가 되지 않음을 이미 보았다. 따라서 이들은 제외해야 한다.

> ? **생각해 보기** $(*)$가 성립하는 것처럼 보이는데도, 왜 두 번째 해 집합에서 $2\pi$의 배수들을 버려야 할까?

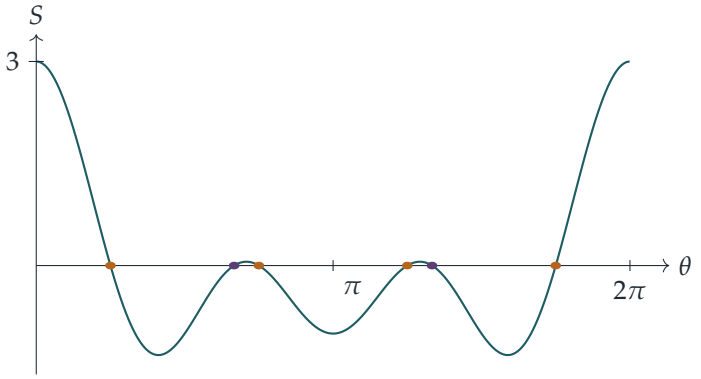
$\theta = 2m\pi$에서는 $S$가 무엇이든 $(*)$의 양변이 모두 영이므로, $(*)$는 그곳에서 $S$에 대하여 아무것도 알려 주지 않는다. 이것은 양변에 $\sin\frac{1}{2}\theta$를 곱하면서 생긴 거짓 단서였다. $b-a \geq 2$이므로 두 번째 해 집합에는 $\theta = 2\pi/(b-a)$와 같은 진짜 해가 여전히 들어 있다.

이를 종합하면, 해는 정확히 다음과 같다.

$$\theta = \frac{(2k+1)\pi}{a+b-1} \ (k \in \mathbb{Z}) \qquad \text{또는} \qquad \theta = \frac{2k\pi}{b-a} \ (k \in \mathbb{Z},\ b-a \nmid k).$$

두 해 집합은 겹칠 수 있다. 그래도 문제될 것은 없는데, 양쪽에 모두 속하는 값도 여전히 하나의 해일 뿐이기 때문이다.

예를 들어 $a=1, b=4$이면 방정식은 $\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$이다. $(0, 2\pi)$에서 이 방정식의 근은 첫 번째 해 집합에서 나온 $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$와 두 번째 해 집합에서 나온 $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$이다. $S=3$이 되는 $\theta = 0$과 $\theta = 2\pi$는 빠져 있음에 주의한다.




곡선 $S = \cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta$: 호박색 근은 코사인 인수에서, 자주색 근은 사인 인수에서 나온다.

## 검산

- $a=1, b=4$일 때: $\theta = \frac{\pi}{4}$에서 $\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$이고, $\theta = \frac{2\pi}{3}$에서 $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1 = 0$이다.
- 수치적으로, 여러 쌍 $a, b$에 대하여 임의의 $\theta$에서 $(*)$가 성립한다. 모든 $1 \leq a \leq 6$, $a+2 \leq b \leq 11$에 대하여 $(0, 6\pi)$에서 $S$를 촘촘하게 조사하면 공식이 주는 근만 정확히 나오고 다른 근은 나오지 않는다. 예를 들어 $a=1, b=3$일 때 근 $\theta = 13\pi/3 \approx 13.6136$은 첫 번째 해 집합에서 나온다.

## 흔한 실수

- 확인하지 않고 $(*)$를 $\sin\frac{1}{2}\theta$로 나누어 $\theta = 2m\pi$를 해에 포함시키는 것. 그곳에서는 $S = b - a \neq 0$이다.
- 연쇄 소거되는 합의 끝 항을 잘못 구하는 것. 마지막 코사인이 $\cos(b-1)\theta$이므로 끝 항은 $\sin\left(b-\frac{1}{2}\right)\theta$와 $\sin\left(a-\frac{1}{2}\right)\theta$이다.
- 문제가 모든 해를 구하라고 하는데 $[0, 2\pi)$와 같은 한 구간의 해만 제시하는 것.

## STEP 너머

$\sum \cos r\theta$의 닫힌 꼴은 $e^{i\theta}$에 대한 등비급수(geometric series)의 실수부(real part)이다. $a = -n$, $b = n+1$로 두면 **디리클레 핵**(Dirichlet kernel) $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta / \sin\frac{1}{2}\theta$를 얻는데, 이것은 푸리에(Fourier) 급수 이론과 그 급수가 수렴(converge)하는지의 문제에서 핵심적인 역할을 한다. 이와 같은 삼각함수의 합이 왜 $e^{i\theta}$로 다루면 간단해지는지 알아보려면 Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)가 좋은 출발점이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.