풀이

STEP III 2003, 문제 5

순수수학 • 삼차방정식의 근

> **STEP III 2003, 5번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q5

핵심 아이디어

근의 개수는 그래프를 보고 센다. 최고차항의 계수가 양수인 이차식은 최솟값이 x축 아래에 있을 때, 그리고 그때에만 x축과 두 번 만난다. 최고차항의 계수가 양수인 삼차식은 극댓값이 x축 위에 있고 극솟값이 x축 아래에 있을 때, 그리고 그때에만 x축과 세 번 만난다. 모든 근이 양수가 되게 하려면 극점(turning point)이 y축의 어느 쪽에 있는지, 그리고 곡선이 y축과 만나는 점에서 곡선의 부호가 무엇인지를 살펴본다. 마지막 방정식은 평행이동한 삼차식이 모습을 바꾼 것이다. 완전세제곱식을 만들어 그 꼴로 바꾸면 된다.

풀이

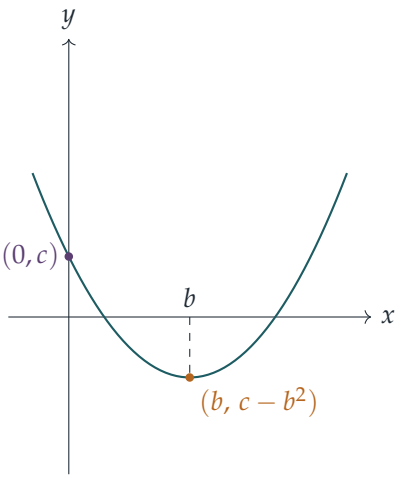
이차식

완전제곱식(completing the square)을 만들면

$$y = x^2 - 2bx + c = (x-b)^2 + c - b^2,$$

이므로 극점(최솟값)은 $(b,\ c-b^2)$이다.

서로 다른 두 실근이 있을 때, 곡선은 $x = b$에 대하여 대칭인 아래로 볼록한 포물선($\cup$ 모양)이고 그 꼭짓점은 x축 아래에 있다. 이 곡선은 y축과 $(0, c)$에서 만난다.



서로 다른 두 실근. 이 포물선은 최고차항의 계수가 양수이므로 $x \to \pm\infty$일 때 $y \to +\infty$이고, 최솟값은 $c - b^2$이다. $c - b^2 < 0$이면 곡선은 x축 아래로 내려갔다가 $x = b$의 양쪽에서 다시 올라오므로 x축과 두 번 만난다. $c - b^2 = 0$이면 곡선은 x축에 접하고(중근(repeated root)), $c - b^2 > 0$이면 x축과 만나지 않는다. 따라서 조건은

$$b^2 > c.$$

이다.

서로 다른 두 양의 근. 조건이

$$b^2 > c, \qquad b > 0, \qquad c > 0.$$

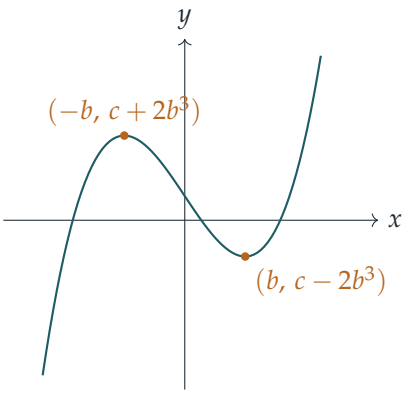
임을 보이자. **필요조건(necessary):** 두 근 α, β는 $\alpha + \beta = 2b$, $\alpha\beta = c$를 만족하고, 두 근이 모두 양수이면 이 두 값도 모두 양수이다. **충분조건(sufficient):** $b^2 > c$이면 근이 두 개 있고, $x = b$의 양쪽에 하나씩 있다. $b > 0$이므로 오른쪽 근은 양수이다. 왼쪽 근은 곡선이 감소하는 구간에 있다. 곡선은 $x = 0$에서 양수(높이 $c > 0$)이고 $x = b > 0$에서 음수이므로, 이 근은 0과 b 사이에 있고, 따라서 이 근도 양수이다.

삼차식

$y = x^3 - 3b^2x + c$에 대하여 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2 - 3b^2 = 3(x - b)(x + b)$이고, 이는 $x = \pm b$에서 0이다. 대입하면

$$x = -b : \ y = -b^3 + 3b^3 + c = c + 2b^3, \qquad x = b : \ y = b^3 - 3b^3 + c = c - 2b^3.$$

이다. $b > 0$이므로 극점은 $(-b,\ c + 2b^3)$에서 극대, $(b,\ c - 2b^3)$에서 극소이다. 도함수는 $x < -b$에서 양수, 그 사이에서 음수, $x > b$에서 양수이기 때문이다.



곡선은 $-\infty$에서 극대까지 증가하고, 극소까지 감소한 다음, $+\infty$까지 증가하며, 이 세 구간 각각에서 순단조(strictly monotonic)이다. 따라서 극댓값이 x축 위에 있고 극솟값이 x축 아래에 있을 때, 그리고 그때에만 각 구간에 근이 하나씩 있어 서로 다른 세 근을 갖는다.

$$c+2b^3>0 \text{ 이고 } c-2b^3<0, \qquad \text{즉} \qquad -2b^3<c<2b^3.$$

극값 중 하나가 0이면 중근이 생기고, 두 극값이 같은 부호(0이 아닌)를 가지면 실근은 하나뿐이다. 따라서 $|c|<2b^3$이 필요충분조건이다.

평행이동한 삼차식의 서로 다른 세 양의 근

곡선 $y=(x-a)^3-3b^2(x-a)+c$는 앞의 곡선을 오른쪽으로 a만큼 평행이동(translation)한 것이다($b>0$은 그대로 둔다). 따라서 이 곡선이 서로 다른 세 실근을 가질 필요충분조건은 $|c|<2b^3$이고, 이때 극대는 $x=a-b$, 극소는 $x=a+b$에서 일어나며, 근 $x_1<x_2<x_3$은

$$x_1<a-b<x_2<a+b<x_3.$$

을 만족한다. 세 근이 모두 양수일 필요충분조건은 가장 작은 근 x_1이 양수인 것이다. 곡선이 y축과 만나는 높이를

$$y(0)=(-a)^3-3b^2(-a)+c=c-a^3+3ab^2$$

라 하자. 조건이

$$|c|<2b^3, \qquad a>b, \qquad c<a^3-3ab^2.$$

임을 보이자.

? **생각해 보기** 왜 "$y(0)<0$"만으로는 세 근을 모두 원점 오른쪽에 둘 수 없는가?

y는 x_2와 x_3 사이에서도 음수이기 때문이다. $x = 0$에서의 값이 음수라는 것은 원점이 가운데 근과 가장 큰 근 사이에 있다는 뜻일 수도 있다. 따라서 0이 곡선의 첫 번째 증가 구간, 즉 극대점의 왼쪽에 있다는 것도 알아야 한다. 이것이 $a > b$의 역할이다.

필요조건. 서로 다른 세 양의 근이 있다고 하자. 그러면 앞 문항에 의하여 $|c| < 2b^3$이다. 또 $0 < x_1 < a - b$이므로 $a > b$이다. 마지막으로, y는 $(-\infty, a-b]$에서 순증가하고 $y(x_1) = 0$이므로 $0 < x_1$에서 $y(0) < 0$이다. 이로부터 $c < a^3 - 3ab^2$를 얻는다.

충분조건. 세 조건이 모두 성립한다고 하자. 그러면 서로 다른 세 실근이 있고 $0 < a - b$이므로 0은 y가 순증가하는 구간 $(-\infty, a-b]$에 속한다. $y(0) < 0 = y(x_1)$이므로 $0 < x_1$이고, 따라서 세 근은 모두 양수이다.

그러므로 이 방정식이 서로 다른 세 양의 근을 가질 필요충분조건은

$$a > b \quad \text{이고} \quad -2b^3 < c < \min(2b^3,\ a^3 - 3ab^2).$$

이다. ($a > b > 0$일 때 $a^3 - 3ab^2 + 2b^3 = (a-b)^2(a+2b) > 0$이므로 c에 대한 이 범위는 모순 없이 성립한다.)

마지막 방정식

2로 나누고 완전세제곱식을 만든다. $(x-a)^3$의 x^2항은 $-3ax^2$이므로 $3a = \frac{9}{2}$, 즉 $a = \frac{3}{2}$이어야 한다. $x = t + \frac{3}{2}$로 놓으면

$$\begin{aligned} x^3 - \tfrac{9}{2}x^2 + \tfrac{7}{2}x - \tfrac{1}{2} &= t^3 + (\tfrac{27}{4} - \tfrac{27}{2} + \tfrac{7}{2})t + (\tfrac{27}{8} - \tfrac{81}{8} + \tfrac{21}{4} - \tfrac{1}{2}) \\ &= t^3 - \tfrac{13}{4}t - 2, \end{aligned}$$

이고, a를 그렇게 골랐으므로 t^2항은 소거된다. 따라서

$$2x^3 - 9x^2 + 7x - 1 = 0 \iff (x - \tfrac{3}{2})^3 - 3b^2(x - \tfrac{3}{2}) + c = 0, \qquad a = \tfrac{3}{2},\ b^2 = \tfrac{13}{12},\ c = -2,$$

이고, $b = \sqrt{13/12} > 0$이다. 이제 세 조건을 확인한다.

- $|c| < 2b^3$: 이는 $2 < 2b^3$, 즉 $b^2 > 1$이라는 뜻이고, $b^2 = \frac{13}{12} > 1$이므로 성립한다.
- $a > b$: 둘 다 양수이고 $a^2 = \frac{9}{4} = \frac{27}{12} > \frac{13}{12} = b^2$이다.
- $c < a^3 - 3ab^2$: $a^3 - 3ab^2 = a(a^2 - 3b^2) = \frac{3}{2}(\frac{9}{4} - \frac{13}{4}) = -\frac{3}{2}$이고 $-2 < -\frac{3}{2}$이다.

세 조건이 모두 성립하므로, 구하는 대로 $2x^3 - 9x^2 + 7x - 1 = 0$은 서로 다른 세 양의 근을 갖는다.

검산

- 부호의 변화로 최종 답을 직접 확인할 수 있다. $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x - 1$이라 하면 $p(0) = -1$, $p(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, $p(1) = -1$, $p(3) = -7$, $p(4) = 11$이다. 따라서 $(0, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$,

$(3,4)$에 근이 있다. 수치적으로 이 근들은 0.185, 0.760, 3.555이다.

- $y(0) = c - a^3 + 3ab^2 = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식(monic cubic) $x^3 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{7}{2}x - \frac{1}{2}$의 상수항과 일치하며, 당연히 그래야 한다.
- (a,b,c)를 수천 번 무작위로 골라 시험해 본 결과, 매번 위의 조건과 일치했다.

흔한 실수

- 양수 조건으로 $y(0) < 0$만(또는 $a > b$만) 쓰는 것. 둘 다 필요하다. $y(0) < 0$은 원점이 더 큰 두 근 사이에 있을 때에도 성립한다.
- $|c| \leq 2b^3$에서 등호가 성립하면 중근이 생기므로 "서로 다른 세 근"이 아니라는 점을 잊는 것.
- 평행이동의 방향을 반대로 생각하는 것. $x - a$에 대한 곡선은 원래 곡선을 **오른쪽**으로 a만큼 옮긴 것이다.

STEP 너머

여기서처럼 어떤 삼차식이든 평행이동으로 "축약된(depressed)" 꼴 $t^3 + pt + q$로 바꿀 수 있다. 이때 이 삼차식이 서로 다른 세 실근을 가질 필요충분조건은 $4p^3 + 27q^2 < 0$이다. $p = -3b^2$, $q = c$로 놓으면 이는 위에서 구한 조건 $c^2 < 4b^6$이 된다. $-(4p^3 + 27q^2)$를 **판별식**(discriminant)이라 하며, 이는 삼차방정식을 어떻게 풀었는가(카르다노(Cardano)의 공식), 그리고 마침내 갈루아(Galois) 이론에 이르는 이야기의 출발점이다. Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군)는 그 이론으로 나아가는 좋은 다음 단계이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.