풀이

STEP III 2003, 문제 4

순수수학 • 매개변수 곡선의 접선

> **STEP III 2003, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q4

핵심 아이디어

직선은 매개변수(parameter)에 대한 **삼차식**(*cubic*)이 0이 되는 곳에서 이 곡선과 만난다. 접선(tangent)은 t에서 중근(double root)을 주므로, 근의 합을 이용하면 세 번째 근 T를 곧바로 알 수 있다. 그러면 T의 공식이 tan의 배각 공식(double-angle formula)과 꼭 닮아 있으므로 $t = \tan\theta$로 놓아 볼 생각이 든다. 이렇게 하면 사상 $t \mapsto T$는 각에 대한 간단한 일차 사상이 되고, 이를 반복(iterate)하는 것도 쉬워진다.

풀이

T의 공식

$y = t + t^3$은 t에 대하여 순증가하므로 서로 다른 매개변수는 서로 다른 점을 준다. 따라서 곡선 위의 점과 매개변수의 값은 일대일 대응(one-to-one correspondence)을 이룬다.

미분하면 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t$이고 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 + 3t^2$이므로, $t \neq 0$일 때 t에서의 접선의 기울기(gradient)는

$$m = \frac{1 + 3t^2}{2t}.$$

이다. ($t \neq 0$이므로 접선은 수직선이 아니다.) 접선의 방정식은 $y - (t + t^3) = m(x - t^2)$이다. 매개변수가 s인 점이 이 접선 위에 있을 필요충분조건은

$$s + s^3 - (t + t^3) = m(s^2 - t^2), \qquad \text{즉} \qquad f(s) \equiv s^3 - ms^2 + s - (t + t^3 - mt^2) = 0.$$

이다. 분명히 $f(t) = 0$이고, m의 선택에 의해 $f'(t) = 3t^2 - 2mt + 1 = 0$이다. 따라서 $s = t$는 이 삼차식의 (적어도) 중근이고, 근은 어떤 실수 T에 대하여 $t,\ t,\ T$이다.

$s^3 - ms^2 + \ldots$의 근의 합은 m이므로

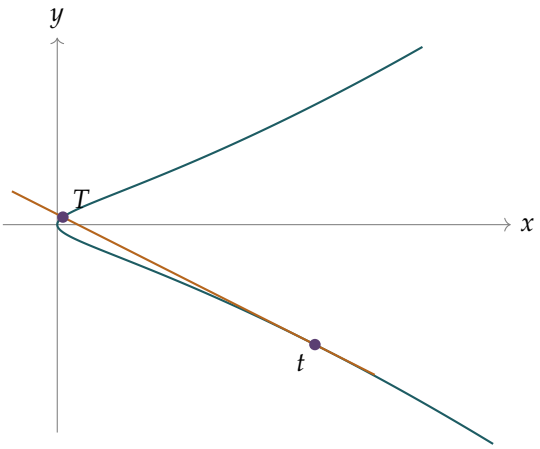
$$2t + T = \frac{1 + 3t^2}{2t}$$
$$T = \frac{1 + 3t^2 - 4t^2}{2t} = \frac{1 - t^2}{2t}.$$

이다. 이 근 T가 직선이 곡선과 만날 수 있는 유일한 다른 곳이다.

접선이 곡선과 **다시** 만나려면 $T \neq t$이어야 한다. 그런데

$$T = t \iff 1 - t^2 = 2t^2 \iff 3t^2 = 1,$$

이므로 $3t^2 \neq 1$이어야 한다. ($3t^2 = 1$일 때 근 t는 삼중근이 되고 접선은 곡선과 한 번만 만난다. 이 점들이 변곡점(points of inflection)이다.) 이로써 두 결과가 모두 증명된다.



$t_0 = \tan\frac{7}{18}\pi$인 수열

$t = \tan\theta$로 놓자. 배각 공식에 의해

$$T = \frac{1 - \tan^2\theta}{2\tan\theta} = \frac{1}{\tan 2\theta} = \cot 2\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right).$$

이다. 따라서 $t_i = \tan\theta_i$이면 $\theta_{i+1} = \frac{\pi}{2} - 2\theta_i$로 잡을 수 있다. tan은 주기(period)가 π이고 길이가 π인 임의의 구간에서 ($\frac{\pi}{2}$의 홀수 배를 제외하면) 일대일이므로, 두 매개변수가 같을 필요충분조건은 대응하는 각의 차가 π의 배수인 것이다.

생각해 보기 반복하기 전에, 다음 점이 존재하려면 각 t_i에 대해 무엇을 확인해야 할까?

이 작도가 가능하려면 매 단계에서 $t_i \neq 0$이고 $3t_i^2 \neq 1$이어야 한다. 즉 θ_i는 $\frac{\pi}{2}$의 배수가 아니어야 하고, $\pm\frac{\pi}{6}$에 π의 배수를 더한 값도 아니어야 한다. $\frac{\pi}{18}$의 배수로 나타내면, 18을 법으로 $0, \pm 3, \pm 9$를 피해야 한다.

$\theta_0 = \frac{7\pi}{18}$에서 시작하면

$$\begin{aligned}\theta_1 &= \frac{9\pi}{18} - \frac{14\pi}{18} = -\frac{5\pi}{18},\\ \theta_2 &= \frac{9\pi}{18} + \frac{10\pi}{18} = \frac{19\pi}{18} \equiv \frac{\pi}{18} \pmod{\pi},\\ \theta_3 &= \frac{9\pi}{18} - \frac{2\pi}{18} = \frac{7\pi}{18}.\end{aligned}$$

이다. $7, -5, 1$은 어느 것도 금지된 값이 아니므로 모든 단계가 유효하다. 따라서 $t_3 = \tan\frac{7\pi}{18} = t_0$이므로 $P_3 = P_0$이다. 그러나 $\theta_1 - \theta_0 = -\frac{12\pi}{18}$은 π의 배수가 아니므로 $t_1 = \tan(-\frac{5\pi}{18}) < 0 < t_0$이고 $P_1 \neq P_0$이다. 세 점의 매개변수는 $\tan 70^\circ$, $-\tan 50^\circ$, $\tan 10^\circ$이다.

두 번째 시작값

$g(\theta) = \frac{\pi}{2} - 2\theta$로 놓자. 반복하면

$$g^2(\theta) = -\frac{\pi}{2} + 4\theta, \qquad g^3(\theta) = \frac{3\pi}{2} - 8\theta.$$

이다. 따라서 $P_3 = P_0$일 필요충분조건은 $\frac{3\pi}{2} - 8\theta \equiv \theta \pmod{\pi}$, 즉 $9\theta \equiv \frac{3\pi}{2} \pmod{\pi}$이고, 이로부터

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{9} = \frac{(3+2k)\pi}{18}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

를 얻는다. 마찬가지로 $P_1 = P_0$일 필요충분조건은 $3\theta \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$, 즉 $\theta = \frac{(3+6j)\pi}{18}$이다. 이는 정확히 $3 + 2k \equiv 3, 9, 15 \pmod{18}$인 경우이다. 이 경우들은 $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$이 되거나 유한한 t가 아예 없으므로 어차피 제외된다.

π를 법으로 남는 것은 $\theta \in \{\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}\}$이다. $t_0 > 0$이려면 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이어야 하므로 $\tan\frac{\pi}{18}$, $\tan\frac{5\pi}{18}$, 그리고 주어진 $\tan\frac{7\pi}{18}$을 얻는다. $\tan\frac{\pi}{18}$은 위 순환의 P_2일 뿐이다. 진정으로 새로운 순환을 주는 값은

$$t_0 = \tan\frac{5\pi}{18} \ (= \tan 50^\circ),$$

이며, 이때 $\theta_0 = \frac{5\pi}{18}$, $\theta_1 = -\frac{\pi}{18}$, $\theta_2 = \frac{11\pi}{18}$, $\theta_3 = \frac{9\pi}{18} - \frac{22\pi}{18} = -\frac{13\pi}{18} \equiv \frac{5\pi}{18}$이다. $5, -1, 11$은 어느 것도 금지된 값이 아니고, $t_1 = -\tan 10^\circ \neq t_0$이다. $\tan\frac{5\pi}{18}$과 $\tan\frac{\pi}{18}$ 중 어느 것이든 문제의 답이 된다.

생각해 보기 각을 "π를 법으로(modulo π)" 다루어도 되는 이유는 무엇일까?

우리가 사용하는 것은 $t = \tan\theta$뿐이고, $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$이기 때문이다. θ_i에 π를 더하면 $g(\theta_i)$는 2π만큼 바뀌는데, 이는 t_{i+1}을 바꾸지 않는다. 따라서 매개변수의 수열 전체는 π를 법으로 한 θ_0에만 의존한다.

검산

- $t = -1$이면 $T = 0$이다. 실제로 $(1, -2)$에서의 접선은 기울기가 -2이고 원점을 지난다.
- 수치적으로, $t_0 = \tan 70^\circ \approx 2.747477$이면 $t_1 \approx -1.191754$, $t_2 \approx 0.176327$, $t_3 \approx 2.747477$이다. 마찬가지로 $\tan 50^\circ \approx 1.191754 \to -0.176327 \to -2.747477 \to 1.191754$이다.
- 임의의 t에 대하여 다른 교점을 구하는 삼차방정식을 수치적으로 풀어 보면 $T = (1 - t^2)/(2t)$와 일치한다.

흔한 실수

- 현(chord)의 기울기를 구해 같다고 놓은 다음, 인수 $T - t$를 약분하는 것을 잊는 실수. 근의 합에 대한 비에트(Vieta) 공식을 쓰면 이 문제를 아예 피할 수 있다.
- t에 대한 사상을 소수로 직접 반복하는 것. 그러면 정확한 순환이 가려진다. $P_3 = P_0$을 정확하게 보여 주는 것은 바로 치환 $t = \tan\theta$이다.
- 두 번째 값으로 $\tan\frac{\pi}{6}$을 드는 실수. 이때는 $T = t$이므로 다음 점이 아예 없다.

STEP 너머

현과 접선을 이용한 이 작도는 타원곡선(elliptic curves) 이론의 핵심이다. 타원곡선 이론에서는 똑같은 "세 번째 교점" 규칙이 삼차곡선 위의 점들을 군(group)으로 만든다. 여기서 곡선 $y^2 = x(1+x)^2$은 특이 삼차곡선(singular cubic)이며 (점 $(-1, 0)$에 고립점(isolated point)을 가진다), 치환 $t = \tan\theta$는 접선 사상이 사실은 각을 두 배로 하는 사상이 변장한 것임을 보여 준다. 순환이 원을 아홉 등분하는 데서 나오는 것은 이 때문이다. Silverman과 Tate의 *Rational Points on Elliptic Curves*(타원곡선 위의 유리점)는 이 내용을 학부 수준에서 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.