풀이

STEP III 2003, 문제 3

순수수학 • 곡선 그리기

STEP III 2003, 3번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s3-q3

핵심 아이디어

$u = (1+x)^m$, $v = (1-x)^m$로 놓는다. 그러면 $\mathrm{f} = (u-v)/(u+v)$이고, $u'v - uv'$에 공통인수 $(1-x^2)^{m-1}$이 있으므로 몫의 미분법(quotient rule)을 쓰면 식이 깔끔하게 정리된다. 이 도함수는 결코 음수가 되지 않으며, 이 사실만으로 $y = \mathrm{f}(x)$의 모양에 대해 거의 모든 것을 알 수 있다. 역수 곡선에는 숨은 대칭성이 있다. x를 $1/x$로 바꾸면 f가 $1/\mathrm{f}$로 바뀐다.

풀이

분모는 결코 0이 되지 않는다

어떤 실수 x에 대하여 $(1+x)^m + (1-x)^m = 0$이라고 가정하자.

m이 짝수이면 두 항이 모두 음이 아니므로 두 항 모두 0이어야 한다. 그러려면 $x = -1$과 $x = 1$이 동시에 성립해야 하므로 불가능하다.

m이 홀수이면 $(1+x)^m = -(1-x)^m = (x-1)^m$이다. m이 홀수일 때 사상 $t \mapsto t^m$은 $\mathbb{R}$에서 순증가(strictly increasing)하므로 일대일(one-to-one)이고, 따라서 $1+x = x-1$, 즉 $1 = -1$이다. 이것은 모순이다.

그러므로 모든 실수 x에 대하여 $(1+x)^m + (1-x)^m \neq 0$이고, f는 $\mathbb{R}$ 전체에서 정의되며 미분가능하다.

도함수

$u = (1+x)^m$, $v = (1-x)^m$이라 하면 $u' = m(1+x)^{m-1}$, $v' = -m(1-x)^{m-1}$이다. 몫의 미분법에 의하여

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{(u'-v')(u+v) - (u-v)(u'+v')}{(u+v)^2} = \frac{2(u'v - uv')}{(u+v)^2}.$$

분자는 다음과 같이 간단해진다.

$$\begin{aligned} u'v - uv' &= m(1+x)^{m-1}(1-x)^m + m(1+x)^m(1-x)^{m-1} \\ &= m(1+x)^{m-1}(1-x)^{m-1}[(1-x)+(1+x)] \\ &= 2m(1-x^2)^{m-1}. \end{aligned}$$

따라서

$$\mathrm{f}'(x) = \frac{4m\,(1-x^2)^{m-1}}{\left[(1+x)^m + (1-x)^m\right]^2}.$$

$m = 5$인 경우: 곡선 $y = \mathrm{f}(x)$

이항정리(binomial theorem)로 전개하면 분자에서는 짝수 차수 항이, 분모에서는 홀수 차수 항이 소거된다.

$$\mathrm{f}(x) = \frac{2(5x + 10x^3 + x^5)}{2(1 + 10x^2 + 5x^4)} = \frac{x(x^4 + 10x^2 + 5)}{5x^4 + 10x^2 + 1}, \qquad \mathrm{f}'(x) = \frac{20(1-x^2)^4}{\left[(1+x)^5 + (1-x)^5\right]^2}.$$

이제 곡선의 특징을 읽어 낸다.

- **대칭성**. $\mathrm{f}(-x) = -\mathrm{f}(x)$이므로 곡선은 원점에 대하여 회전대칭(rotational symmetry)이다. 곡선은 $(0,0)$을 지나며, 그 점에서의 기울기는 $\mathrm{f}'(0) = 20/2^2 = 5$이다.
- **단조성**(*monotonic*). 모든 x에 대하여 $\mathrm{f}'(x) \geq 0$이고, 등호는 $x = \pm 1$에서만 성립한다. 따라서 f는 모든 곳에서 증가한다. $x = \pm 1$에서 정류점(stationary point)을 가지며, $(1-x^2)^4$의 부호가 바뀌지 않으므로 이 점들은 극점(turning point)이 아니라 변곡점(point of inflection)이다. 이 점들은 $(1,1)$과 $(-1,-1)$이다. $(1-x)^5$ 항 또는 $(1+x)^5$ 항이 o이 되어 $\mathrm{f} = \pm 1$이 남기 때문이다.
- **$|x|$가 클 때**. $\mathrm{f}(x) \approx x/5$이다. 더 정확히 쓰면

  $$\mathrm{f}(x) - \frac{x}{5} = \frac{x(40x^2 + 24)}{5(5x^4 + 10x^2 + 1)},$$

  이고, 이 값은 $|x| \to \infty$일 때 0으로 수렴한다. 따라서 $y = x/5$는 경사점근선(oblique asymptote)이다. 곡선은 $x > 0$에서 점근선의 위쪽에, $x < 0$에서 아래쪽에 있다.

생각해 보기 $f(x)$의 크기가 1보다 큰 곳은 어디이고, 작은 곳은 어디인가?

f는 증가함수이고 $f(\pm1) = \pm1$이므로, $|x| < 1$에서 $|f(x)| < 1$이고 $|x| > 1$에서 $|f(x)| > 1$이다. 이 사실은 역수 곡선을 그릴 때 중요하다. ($|x| < 1$일 때 $x = \tanh t$로 놓으면 $(1+x)/(1-x) = e^{2t}$이고, f의 분자와 분모를 $(1-x)^5$로 나누면 $f(\tanh t) = \tanh 5t$임을 알 수 있다. 이것은 -1과 1 사이의 S자 모양을 이해하는 또 다른 방법이다.)

곡선 $y = 1/f(x)$

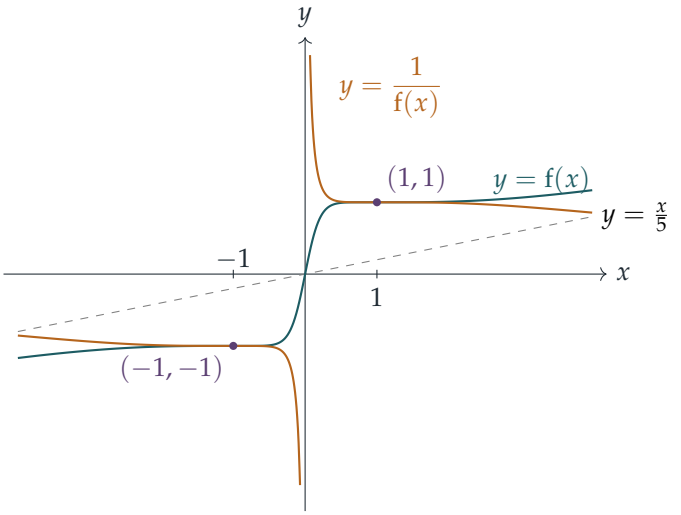
x를 $1/x$로 바꾸고 분자와 분모에 x^5을 곱하면

$$f(1/x) = \frac{(x+1)^5 - (x-1)^5}{(x+1)^5 + (x-1)^5} = \frac{(1+x)^5 + (1-x)^5}{(1+x)^5 - (1-x)^5} = \frac{1}{f(x)},$$

을 얻는다. 여기서 $(x-1)^5 = -(1-x)^5$을 이용하였다. 따라서 $y = 1/f(x)$는 곡선 $y = f(1/x)$이고, 그 특징은 f의 특징으로부터 얻어진다.

- 이 함수는 기함수(odd function)이고, f의 유일한 영점인 $x = 0$에서 정의되지 않는다. 0 근처에서 $1/f(x) \approx 1/(5x)$이므로 y축은 수직점근선(vertical asymptote)이며, $x \to 0^+$일 때 $y \to +\infty$이고 $x \to 0^-$일 때 $y \to -\infty$이다.
- 도함수는 $-f'(x)/f(x)^2 \le 0$이므로 $x > 0$과 $x < 0$에서 각각 감소한다. $(1,1)$과 $(-1,-1)$에서 정류 변곡점을 가진다.
- $|x| \to \infty$일 때 $1/f(x) \approx 5/x \to 0$이므로 x축이 점근선이다. 곡선은 $x > 0$에서 점근선의 위쪽에, $x < 0$에서 아래쪽에 있다.

두 곡선은 $f(x)^2 = 1$인 곳, 즉 $(1,1)$과 $(-1,-1)$에서만 만난다. 그 점들에서 두 곡선은 모두 수평이므로, 서로 가로지르는 것이 아니라 접한다.



검산

- $m = 1$로 놓으면 공식에서 $\mathrm{f}'(x) = 4/2^2 = 1$을 얻는데, 실제로 $\mathrm{f}(x) = 2x/2 = x$이다.
- 수치적으로 $\mathrm{f}(1000)/1000 \approx 0.2000016$이며, 이는 점근선 $y = x/5$와 일치한다. $m = 1, \ldots, 8$에 대하여 임의의 점들에서 중심차분(central difference)으로 구한 도함수 값이 f'의 공식과 일치한다.
- $\mathrm{f}(\tanh t) = \tanh 5t$와 $\mathrm{f}(1/x) = 1/\mathrm{f}(x)$ 모두 임의의 점들에서 10^{-9} 이내로 성립함을 확인하였다.

흔한 실수

- $x = \pm 1$을 극댓값 또는 극솟값으로 부르는 것. 그 점에서 도함수가 0에 닿기는 하지만 부호가 바뀌지 않으므로, 이 점들은 정류 변곡점이다.
- 경사점근선을 놓치는 것. f는 5차식(quintic)을 4차식(quartic)으로 나눈 것이므로 일정한 값에 가까워지는 것이 아니라 $x/5$처럼 커진다.
- $y = 1/\mathrm{f}(x)$가 $(\pm 1, \pm 1)$에서 $y = \mathrm{f}(x)$를 가로지르도록 그리는 것. 그 점에서 두 곡선은 모두 평평하므로 서로 접한다.

STEP 너머

치환 $x = \tanh t$를 이용하면 f가 $\tanh 5t$를 $\tanh t$로 나타낸 공식, 즉 $\tan 5\theta$에 대한 배각공식(multiple-angle formula)의 쌍곡선 함수(hyperbolic function) 버전임을 알 수 있다. 이렇게 보면 f는 5를 곱하는 사상과 켤레(conjugate)인 유리사상(rational map)이다. 이런 사상들과 그것들을 반복 합성할 때의 거동은 복소역학(complex dynamics)의 출발점이다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 유리함수가 복소평면 전체에 어떻게 작용하는지 살펴보기에 아주 좋은 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.