풀이

STEP III 2003, 문제 2

순수수학 • 이항급수

> **STEP III 2003, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q2

핵심 아이디어

중심 이항계수(central binomial coefficient) $\binom{2r}{r}$는 음의 반정수 거듭제곱에 대한 이항급수(binomial series) 속에 숨어 있다. 처음에 주어진 항등식(identity)으로 $(2r)!$을 홀수 인수와 짝수 인수로 나누고 나면, $(1-p)^{-1/2}$에서 p^r의 계수가 정확히 $\binom{2r}{r}/4^r$임이 드러난다. 그러면 각 합은 모습을 바꾼 이항급수일 뿐이고, 할 일은 p를(그리고 (ii)에서는 알맞은 거듭제곱을) 고르는 것뿐이다.

풀이

항등식

$(2r)!$의 인수를 홀수인 것과 짝수인 것으로 나눈다.

$$(2r)! = [1 \times 3 \times \cdots \times (2r-1)] \times [2 \times 4 \times \cdots \times 2r].$$

r개의 짝수 인수는 각각 $1, 2, \ldots, r$ 중 하나에 2를 곱한 것이므로, 두 번째 괄호는 $2^r\, r!$이다. 따라서

$$\binom{2r}{r} = \frac{(2r)!}{r!\,r!} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2r-1) \times 2^r\, r!}{r!\,r!} = \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2r-1)}{r!} \times 2^r,$$

이므로 원하는 식이 성립한다.

소문항 (i)

$|p| < 1$일 때, 이항급수에 의해

$$\begin{aligned}(1-p)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \left(-\tfrac{1}{2}\right)(-p) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}(-p)^2 \\ &\quad + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}(-p)^3 + \cdots \\ &= 1 + \tfrac{1}{2}p + \tfrac{3}{8}p^2 + \tfrac{5}{16}p^3 + \cdots .\end{aligned}$$

일반항도 같은 규칙을 따른다. p^r의 계수에는 인수 $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$에서 나오는 음의 부호 r개와 $(-p)^r$에서 나오는 음의 부호 r개가 더 있으므로, 이들이 서로 상쇄되어 다음이 남는다.

$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{2r-1}{2}}{r!}\,p^r = \frac{1\times 3\times\cdots\times(2r-1)}{2^r\,r!}\,p^r.$$

? **생각해 보기** 이것은 $\binom{2r}{r}$와 어떻게 연결되는가?

항등식에 의해 $\dfrac{1\times 3\times\cdots\times(2r-1)}{r!} = \dfrac{\binom{2r}{r}}{2^r}$이다. 따라서 p^r의 계수는 $\binom{2r}{r}/4^r$이고, $r = 0$일 때도 양변이 모두 1이므로 이 식이 성립한다. 그러므로

$$(1-p)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{2r}{r}\left(\frac{p}{4}\right)^r \qquad (|p|<1).$$

구하려는 합에서는 $(p/4)^r = 1/8^r$이므로 $p = \frac{1}{2}$로 잡는데, 이 값은 수렴 구간(interval of convergence) 안에 있다. 그러면

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\binom{2r}{r}}{8^r} = \left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

소문항 (ii)

추가된 인수 $2r+1$은 거듭제곱을 한 단계 더 나아가 $(1-p)^{-3/2}$를 생각해 보라는 암시이다. $|p| < 1$일 때, 이 함수의 이항급수에서 p^r의 계수는 앞에서처럼 부호가 상쇄되어

$$\begin{aligned}\frac{\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}\times\cdots\times\frac{2r+1}{2}}{r!} &= \frac{3\times 5\times\cdots\times(2r+1)}{2^r\,r!} \\ &= (2r+1)\,\frac{1\times 3\times\cdots\times(2r-1)}{2^r\,r!} = \frac{(2r+1)\binom{2r}{r}}{4^r},\end{aligned}$$

이다. 여기서 $3\times 5\times\cdots\times(2r+1) = (2r+1)\times[1\times 3\times\cdots\times(2r-1)]$임을 이용한 뒤, (i)에서와 똑같이 항등식을 사용하였다. ($r = 0$일 때는 양 끝이 모두 1이다.) 따라서

$$(1-p)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)\binom{2r}{r}\left(\frac{p}{4}\right)^r \qquad (|p|<1).$$

이제 $p/4 = \frac{1}{5}$, 즉 $p = \frac{4}{5}$가 필요한데, 이번에도 $|p| < 1$이다. 따라서

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2r+1)\binom{2r}{r}}{5^r} = \left(1 - \tfrac{4}{5}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\tfrac{1}{5}\right)^{-\frac{3}{2}} = 5^{\frac{3}{2}} = (\sqrt{5})^3,$$

이므로 원하는 결과가 성립한다.

다른 방법으로, $|x| < \frac{1}{4}$일 때 $f(x) = \sum \binom{2r}{r} x^r = (1-4x)^{-1/2}$로 놓는다. 거듭제곱급수(power series)를 수렴 구간 안에서 항별로 미분(term-by-term differentiation)하면 $\sum r\binom{2r}{r} x^r = xf'(x) = 2x(1-4x)^{-3/2}$이므로

$$\sum (2r+1)\binom{2r}{r} x^r = 4x(1-4x)^{-\frac{3}{2}} + (1-4x)^{-\frac{1}{2}} = (1-4x)^{-\frac{3}{2}},$$

이고, $x = \frac{1}{5}$를 대입하면 같은 답을 얻는다.

검산

- (i)의 처음 몇 항은 $1 + \frac{2}{8} + \frac{6}{64} + \frac{20}{512} \approx 1.371$로, 이미 $\sqrt{2} \approx 1.414$에 가깝다. 200개 항을 더하면 $1.41421356\ldots$이 된다.
- (ii)의 급수는 더 천천히 수렴하지만(항의 비가 $\frac{4}{5}$에 가까워진다), 400개 항을 더하면 $11.18033988\ldots$이 되어 $5\sqrt{5} \approx 11.1803$과 일치한다.
- $r = 0, 1, 2, 3$일 때 계수 $\binom{2r}{r}/4^r$는 $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{5}{16}$로, 직접 구한 네 항과 일치한다.

흔한 실수

- 부호를 놓치는 것: 계수에 있는 음의 인수 r개와 $(-p)^r$에서 나오는 $(-1)^r$은 항상 상쇄되므로, 모든 계수는 양수이다.
- 고른 p가 $|p| < 1$을 만족하는지 확인하지 않는 것: 이 조건이 없으면 급수가 그 함수로 수렴한다는 보장이 없다.
- (ii)에서 p만 바꾸어 다시 $(1-p)^{-1/2}$를 사용하는 것: 인수 $2r+1$은 그 급수만으로는 나올 수 없다.

STEP 너머

함수 $\sum \binom{2r}{r} x^r = (1-4x)^{-1/2}$는 중심 이항계수의 생성함수(generating function)로, 조합론(combinatorics)의 표준 도구이다. 예를 들어 이것을 제곱하면 $\sum_r 4^r x^r$이 되고, 이로부터 $\sum_k \binom{2k}{k}\binom{2r-2k}{r-k} = 4^r$이 증명된다. 항별 미분을 정당화하는 것, 그리고 거듭제곱급수가 정확

히 어디에서 수렴하는지 아는 것은 대학 1학년 해석학(analysis)의 주제이다. 거듭제곱급수에 대해서는 Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)를, 급수에 관한 STEP 연습 문제를 더 보려면 Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(STEP 대비 문제집)를 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.