풀이

STEP III 2003, 문제 14

확률과 통계 • 확률생성함수

> **STEP III 2003, 14번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q14

핵심 아이디어

서로 독립(independent)인 점수들의 합의 확률생성함수(probability generating function, pgf)는 각 점수의 pgf의 곱이다. 따라서 **어떤 주사위들이 같은 합의 분포를 주는가**라는 질문은 **다항식을 두 인수로 어떻게 나눌 수 있는가**라는 질문이 된다. 모든 것을 기약(irreducible) 인수로 인수분해(factorise)한 뒤, 그 인수들을 두 주사위에 나누어 주는 방법을 살펴보면 가능한 눈의 재배치를 모두 읽어 낼 수 있다.

풀이

첫 번째 부분

X를 공정한 표준 주사위의 눈이라 하자. $1,\dots,6$의 각 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이므로

$$G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \tfrac{1}{6}(t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6) = \tfrac{1}{6}\,t\,(1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5).$$

괄호 안을 인수분해하려면 항을 둘씩 묶은 다음 세제곱의 차를 이용한다.

$$1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 = (1 + t) + t^2(1 + t) + t^4(1 + t) = (1 + t)(1 + t^2 + t^4),$$
$$1 + t^2 + t^4 = (1 + t^2)^2 - t^2 = (1 + t + t^2)(1 - t + t^2).$$

따라서

$$G_X(t) = \tfrac{1}{6}\,t\,(1 + t)(1 - t + t^2)(1 + t + t^2).$$

X_1과 X_2가 독립적으로 던진 두 주사위의 눈이면 t^{X_1}과 t^{X_2}도 독립이므로 $\mathrm{E}(t^{X_1+X_2}) = \mathrm{E}(t^{X_1})\mathrm{E}(t^{X_2})$이고

$$G_{X_1+X_2}(t) = G_X(t)^2 = \frac{1}{36}\,t^2(1 + t)^2(1 - t + t^2)^2(1 + t + t^2)^2,$$

이것이 구하는 꼴이다.

두 번째 부분

Y와 Z를 각각 눈이 $1,2,2,3,3,4$와 $1,3,4,5,6,8$인 주사위의 눈이라 하자. 면의 개수를 세면

$$G_Y(t) = \tfrac{1}{6}(t + 2t^2 + 2t^3 + t^4),$$
$$G_Z(t) = \tfrac{1}{6}(t + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^8).$$

Y에 대하여: $1 + 2t + 2t^2 + t^3 = (1 + t)(1 + t + t^2)$이며, 이는 전개해 보면 확인할 수 있다. 따라서

$$G_Y(t) = \tfrac{1}{6}\, t\,(1 + t)(1 + t + t^2).$$

Z에 대해서는 첫 번째 부분에서 얻은 곱 $(1 + t)(1 - t + t^2) = 1 + t^3$과 $(1 + t + t^2)(1 - t + t^2) = 1 + t^2 + t^4$가 유용하다. 그러면

$$(1 + t^3)(1 + t^2 + t^4) = 1 + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^7,$$

이고, 여기에 t를 곱하면 정확히 $t + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^8$이 된다. 따라서

$$G_Z(t) = \tfrac{1}{6}\, t\,(1 + t)(1 + t + t^2)(1 - t + t^2)^2.$$

독립적으로 던지므로

$$G_{Y+Z}(t) = G_Y(t)G_Z(t) = \frac{1}{36}\, t^2(1 + t)^2(1 - t + t^2)^2(1 + t + t^2)^2 = G_{X_1+X_2}(t).$$

다항식으로서 같은 두 pgf는 계수가 같고, t^n의 계수는 합이 n일 확률이다. 따라서 이 주사위들로 얻는 모든 합의 확률은 표준 주사위 두 개로 얻는 확률과 같다.

마지막 부분

표준 사면체 주사위의 pgf는

$$\tfrac{1}{4}(t + t^2 + t^3 + t^4) = \tfrac{1}{4}\, t\,(1 + t)(1 + t^2),$$

이므로, 이런 주사위 두 개의 합에 대한 목표 pgf는

$$\frac{1}{16}\, t^2(1 + t)^2(1 + t^2)^2.$$

두 새 주사위의 pgf를 $\frac{1}{4}f(t)$와 $\frac{1}{4}g(t)$라 하자. f에서 t^n의 계수는 눈이 n인 면의 개수이므로, f와 g는 계수가 음이 아닌 정수인 다항식이고 $f(1) = g(1) = 4$이다. 모든 눈이 양의 정수이므로 $f(0) = g(0) = 0$이다. 필요한 조건은

$$f(t)\, g(t) = t^2(1 + t)^2(1 + t^2)^2.$$

생각해 보기 왜 f는 같은 인수 $t, 1+t, 1+t^2$만으로 이루어져야 하고 다른 것은 들어갈 수 없을까?

인수 t와 $1+t$는 일차식이고 $1+t^2$는 실근이 없으므로, 세 인수 모두 실수 범위에서 기약이다. 다항식은 (상수배를 제외하면) 기약 인수로 유일하게 인수분해되므로, 우변의 모든 인수는

$$f(t) = c\,t^k(1+t)^a(1+t^2)^b, \qquad g(t) = \tfrac{1}{c}\,t^{2-k}(1+t)^{2-a}(1+t^2)^{2-b},$$

의 꼴이며, 여기서 $0 \le k, a, b \le 2$이고 $c > 0$은 상수이다.

이제 f와 g에 대한 조건을 하나씩 이용한다.

- **상수 c.** f의 최저차 계수는 c이고 g의 최저차 계수는 $1/c$이다. 둘 다 면의 개수이므로 둘 다 양의 정수이고, 따라서 $c = 1$일 수밖에 없다.
- **t의 거듭제곱.** $f(0) = 0$이려면 $k \ge 1$이어야 하고, $g(0) = 0$이려면 $2-k \ge 1$이어야 한다. 따라서 $k = 1$이다. 즉 각 주사위는 인수 t를 정확히 하나씩 가진다.
- **네 개의 면.** $f(1) = 2^a \cdot 2^b = 4$에서 $a+b = 2$이고, 그러면 $g(1) = 2^{2-a}2^{2-b} = 4$는 자동으로 성립한다.

따라서 (a,b)는 $(2,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$ 중 하나이고, g는 나머지 보완적인 선택을 가진다. 두 주사위를 서로 바꾸어도 같은 쌍이므로 경우는 두 가지이다.

- 둘 다 $(a,b) = (1,1)$인 경우: $f = g = t(1+t)(1+t^2) = t+t^2+t^3+t^4$, 즉 표준 쌍 $1,2,3,4$와 $1,2,3,4$이다.
- $(a,b) = (2,0)$과 $(0,2)$인 경우:

  $$f(t) = t(1+t)^2 = t+2t^2+t^3, \qquad g(t) = t(1+t^2)^2 = t+2t^3+t^5,$$

  이는 눈이 $1,2,2,3$과 $1,3,3,5$인 주사위이다.

각 경우에 두 다항식 모두 계수가 음이 아닌 정수이고 그 합이 4이므로 실제로 주사위가 되며, 만든 방법에 의해 올바른 pgf를 준다.

따라서 가능한 눈의 배치는 표준 쌍과 $\{1,2,2,3\}$, $\{1,3,3,5\}$의 쌍뿐이다.

검산

비표준 사면체 주사위 쌍에 대해 합을 나열해 보자. 같은 확률로 나오는 16개의 합은 $2,4,4,6,\ 3,5,5,7,\ 3,5,5,7,\ 4,6,6,8$이고, 합 $2,\dots,8$의 빈도는 $1,2,3,4,3,2,1$로, 표준 주사위 두 개의 경우와 정확히 같다. 위의 어느 pgf에든 $t = 1$을 대입하면 1이 나오는데, 이는 각 인수분해를 빠르게 검증하는 방법이다. 눈이 1부터 7까지인 모든 사면체 주사위 쌍을 컴퓨

터로 탐색하면 정확히 위의 두 쌍만 나오며, $1,2,2,3,3,4$와 $1,3,4,5,6,8$ 주사위의 합은 표준 분포와 정확히 일치한다 (예를 들어 두 경우 모두 $\mathrm{P}(\text{합} = 7) = \frac{6}{36}$이다).

흔한 실수

- 상수 c를 잊는 것: 한 주사위가 인수 2를, 다른 주사위가 인수 $\frac{1}{2}$을 가질 수 없는 이유가 필요하다. 두 주사위 모두 최저차 계수가 양의 정수라는 사실이 바로 그 이유이다.
- $k = 0$이나 $k = 2$를 허용하는 것. 그러면 한 주사위에 눈이 0인 면이 생기는데, 0은 양의 정수가 아니다.
- $(1 - t + t^2)$를 복소수 일차 인수로 인수분해한 채로 두는 것. 실수 범위에서 이 식은 기약이며, 인수를 나누어 주는 데 필요한 것은 바로 그 꼴이다.

STEP 너머

여기서 나온 육면체 주사위 쌍은 **시셔만 주사위**(*Sicherman dice*)이며, 같은 방법으로 이것이 양의 눈을 가진 유일한 비표준 육면체 주사위 쌍임을 보일 수 있다. 이 논증은 다항식의 유일 인수분해(unique factorisation)에 기대고 있는데, 이는 환과 체(rings and fields)에 대한 첫 강좌에서 산술의 기본정리(fundamental theorem of arithmetic)의 다항식 판으로 만나게 된다. 생성함수(generating function)는 또한 어려운 세기 문제를 대수 문제로 바꾸어 주는 경우가 많다. 두 아이디어 모두에 대해서는 Allenby의 *Rings, Fields and Groups*(환, 체, 군), 그리고 Grimmett와 Welsh의 *Probability: An Introduction*(확률론 입문)을 참고하라.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.