풀이

STEP III 2003, 문제 11

역학 • 요격의 운동학

> **STEP III 2003, 11번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q11

핵심 아이디어

잠시 운동은 잊고, 충돌이 일어날 바로 그 한 점만 생각해 보자. 그 순간 A, B와 충돌 지점은 삼각형을 이루고, 그 세 변은 d, P가 이동한 거리, Q가 이동한 거리이며, B에서의 각은 방위각(bearing)으로 정해진다. 그러면 코사인 법칙(cosine rule)으로 방정식 하나를 얻고, 두 이동 거리를 모두 시간으로 나타내면 이 방정식은 이차방정식(quadratic equation)이 된다. 따라서 충돌이 가능한지는 이 이차방정식이 양의 근(root)을 가지는지의 문제가 된다.

풀이

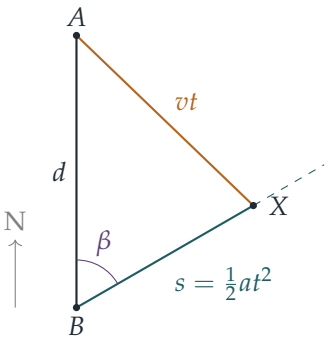
P와 Q를 수평면 위에서 움직이는 입자로 모형화한다. 방위각은 북쪽에서 시계 방향으로 잰 것이고, $v > 0$이다.

충돌 방정식

Q가 시각 $t > 0$에 점 X에서 P와 부딪친다고 하자. 그때까지 P는 정지 상태에서 출발하여 고정된 직선을 따라 일정한 가속도 a로 움직였으므로

$$BX = s = \tfrac{1}{2}at^2,$$

이고, Q는 일정한 속력으로 직선 운동을 했으므로 $AX = vt$이다.



B에서 A로 향하는 방향은 정북쪽이고 B에서 X로 향하는 방향의 방위각은 β이므로, 각 ABX는 β이다(또는 $\beta > 180°$이면 $360° - \beta$인데, 코사인 값은 같다). 삼각형 ABX에서 코사인 법칙을 쓰면

$$v^2t^2 = d^2 + s^2 - 2ds\cos\beta.$$

이다. ($\beta = 0$ 또는 $180°$이면 이 "삼각형"은 납작해지지만 방정식은 여전히 성립한다. 이때 식은 $(vt)^2 = (d \mp s)^2$이 된다.) $t^2 = 2s/a$이므로 좌변은 $2v^2s/a$이고, 정리하면

$$s^2 - 2\left(d\cos\beta + \frac{v^2}{a}\right)s + d^2 = 0. \qquad (*)$$

이다.

역으로, $(*)$가 근 $s > 0$을 가진다면 $t = \sqrt{2s/a}$로 두고, 그 시각에서 P의 위치를 X라 하자. 그러면 $(*)$는 정확히 $AX = vt$임을 말해 주고, $AX > 0$이다. 따라서 Q를 A에서 X를 향해 쏘아 보내면, Q는 P와 마찬가지로 시각 t에 X에 도달하여 부딪친다. 그러므로

$$\text{적절한 방향이 존재한다} \iff (*)\text{가 다음 양의 근을 가진다: } s.$$

필요조건

$k = d\cos\beta + v^2/a$로 두면 $(*)$는 $s^2 - 2ks + d^2 = 0$이다.

> **생각해 보기** 이 이차방정식은 분명 실근을 가져야 한다. 그런데 그것으로 충분할까? 근에 대해 무엇을 더 알아야 할까?

s는 이동한 거리이므로 근은 **양수**이기도 해야 한다. 두 근의 곱은 $d^2 > 0$이므로 두 근의 부호는 같고, 두 근의 합은 $2k$이다. 따라서 양의 근이 존재할 필요충분조건은 판별식(discriminant)이 음이 아니고 $k > 0$인 것이다.

$$k^2 \geq d^2 \quad \text{그리고} \quad k > 0 \iff k \geq d.$$

($d > 0$이므로 $k > 0$이면 $k^2 \geq d^2$은 $k \geq d$와 같고, $k \geq d$이면 반드시 $k > 0$이다.)

따라서 Q가 P와 부딪칠 수 있다면

$$d\cos\beta + \frac{v^2}{a} \geq d, \qquad \text{즉,} \qquad v^2 \geq ad(1-\cos\beta),$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

P가 거리 d만큼 움직이기 전에 부딪치기

이제 $v^2 > ad(1-\cos\beta)$라 하면 $k > d > 0$이다. 그러면 판별식 $4(k^2-d^2)$은 양수이고, $(*)$는 서로 다른 두 근 $s_1 < s_2$를 가진다. 두 근의 합 $2k$와 곱 d^2이 모두 양수이므로 두 근은 모두 양수이다. 두 근은 서로 다르고

$$s_1 s_2 = d^2,$$

이므로 둘 다 d 이상이거나 둘 다 d 이하일 수는 없다. 따라서

$$s_1 < d < s_2.$$

이다. 구체적으로 $s_1 = k - \sqrt{k^2-d^2}$이다.

앞의 역(converse)에 의해, P의 경로를 따라 B에서 거리 s_1만큼 떨어진 점 X_1을 향해 Q를 쏘아 보내면 Q는 시각 $t_1 = \sqrt{2s_1/a}$에 P와 부딪치고, 그 순간 P는 겨우 $s_1 < d$만큼만 움직였다. 따라서 P가 거리 d만큼 움직이기 전에 Q가 P와 부딪치도록 겨냥할 수 있고, 이것이 증명할 내용이었다.

검산

- $\beta = 0$으로 두자. 그러면 P는 곧장 A를 향해 달리므로, v의 값에 관계없이 둘은 반드시 만난다. 조건은 $v^2 \geq 0$이 되고, 이는 항상 성립한다. 이때 $(*)$는 $s^2 - 2(d+v^2/a)s + d^2 = 0$이 되고, 작은 근은 d보다 작다. 즉 상식대로 둘은 P가 A에 닿기 전에 만난다.
- $a = d = 1$, $\beta = 90°$(따라서 P는 정동쪽으로 달린다), 그리고 $v^2 = 2 > 1 = ad(1-\cos\beta)$로 두자. 그러면 $(*)$는 $s^2 - 4s + 1 = 0$이므로 $s_1 = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268 < 1$이다. $t_1 = \sqrt{2s_1}$에서 $s_1^2 + 1 = 2t_1^2$이므로, 충돌 지점은 실제로 A에서 거리 vt_1만큼 떨어져 있다. a, d, β, v에 여러 무작위 값을 넣은 수치 검산으로 $s_1 < d$에서의 충돌을 확인했고, $v^2 < ad(1-\cos\beta)$일 때는 P가 항상 A에서 vt보다 멀리 떨어져 있음도 확인했다.
- 경계의 경우 $v^2 = ad(1-\cos\beta)$에서는 $k = d$이고 중근 $s = d$를 얻는다. 가능한 충돌은 P가 정확히 d만큼 이동했을 때뿐이며, 그래서 마지막 부분에서는 엄격한 부등식이 필요하다.

흔한 실수

- 판별식이 음이 아니라는 조건만 요구하는 것. 그러면 $|k| \geq d$를 얻는데, 이는 $k \leq -d$도 허용하고, 이 경우 두 근이 모두 음수여서 충돌이 일어나지 않는다.
- 코사인 법칙에서 엉뚱한 각을 쓰는 것. B에서의 각은 BA(정북쪽)와 BX(방위각 β) 사이의 각이므로 $180^\circ - \beta$가 아니라 β 자체이다.
- 마지막 부분에서 필요조건만 증명하는 것. X_1을 향한 겨냥이 실제로 성공한다는 것, 즉 역 방향의 논증도 보여야 한다.

STEP 너머

이것은 추격과 요격 문제이다. 여기서는 표적의 경로가 미리 알려져 있고 요격하는 쪽은 직선으로 움직이므로, 문제는 만나는 시각에 대한 방정식 하나로 귀결된다. 미사일 유도나, 추격자가 계속 표적 쪽으로 방향을 트는 "추적 곡선(pursuit curves)"은 그 대신 미분방정식으로 이어진다. 만나는 점을 먼저 정해 놓고 누가 제시간에 그곳에 닿을 수 있는지 묻는 습관은 대학 1학년 역학의 표준 도구이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 상대 운동의 운동학을 꼼꼼하게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.