풀이

STEP III 2003, 문제 10

역학 • 가변 가속도

> **STEP III 2003, 10번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s3-q10

핵심 아이디어

가속도(acceleration) $kx\dot{x}$는 시간에 대한 어떤 함수의 도함수 그 자체(exact derivative)이다. 즉 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}kx^2)$이다. 따라서 곧바로 한 번 적분하여 1계 방정식(first-order equation) $\dot{x} = \frac{1}{2}kx^2 + C$를 얻을 수 있고, 이 방정식은 변수분리(separation of variables)가 된다. 모든 것은 상수 C의 부호가 결정한다. 상수가 양수이면 아크탄젠트(arctangent)가 나오고 해는 발산하며, 음수이면 부분분수(partial fractions)와 로그가 나오고 해는 한 값으로 안정된다.

풀이

입자가 x축 위에서 $\ddot{x} = kx\dot{x}$에 따라 움직인다고 보자. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2) = 2x\dot{x}$이므로 운동방정식(equation of motion)은

$$\frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}kx^2\right), \qquad \text{따라서} \qquad \dot{x} = \tfrac{1}{2}kx^2 + C$$

이다. 여기서 C는 상수이다. $t = 0$일 때 $x = d$, $\dot{x} = U$이므로 $C = U - \frac{1}{2}kd^2$이고,

$$\dot{x} = \tfrac{1}{2}k(x^2 - d^2) + U. \qquad (*)$$

소문항 (i)

$U = kd^2$이면 식 $(*)$는

$$\dot{x} = \tfrac{1}{2}k(x^2 + d^2)$$

가 된다. 우변은 항상 양수이므로 변수를 분리할 수 있다.

$$\int_d^x \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + d^2} = \int_0^t \tfrac{1}{2}k\,\mathrm{d}s \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{d}\left[\arctan\frac{x}{d} - \arctan 1\right] = \tfrac{1}{2}kt.$$

$\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$이므로 $\arctan(x/d) = \frac{1}{2}dkt + \frac{\pi}{4}$이고, 따라서

$$x = d\tan\Big(\frac{dkt}{2} + \frac{\pi}{4}\Big).$$

이 식은 tan의 인수가 $\frac{\pi}{2}$보다 작은 동안 성립한다(아크탄젠트의 값은 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$에 속한다). t가 0에서부터 증가하면 인수는 $\frac{\pi}{4}$에서부터 증가하고,

$$\frac{dkt}{2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \text{즉,} \qquad t = \frac{\pi}{2dk}$$

일 때 $\frac{\pi}{2}$에 도달한다. $\theta \to \frac{\pi}{2}$ from below, 즉 θ가 아래쪽에서 다가갈 때 $\tan\theta \to +\infty$이고 $d > 0$이므로, $t \to \frac{\pi}{2dk}$일 때 $x \to \infty$이다. 이것이 보이려던 것이다. 입자는 유한한 시간 안에 무한대에 도달한다.

소문항 (ii)

이제 $U < 0$이므로 $C = U - \frac{1}{2}kd^2 < 0$이다. $a > 0$인 a를 써서 $C = -\frac{1}{2}ka^2$으로 나타내자. 즉,

$$a = \sqrt{d^2 - \frac{2U}{k}}, \qquad \text{따라서} \qquad \dot{x} = \tfrac{1}{2}k(x^2 - a^2).$$

$U < 0$이고 $k > 0$이므로 $a > d > 0$이다.

> **생각해 보기** 부분분수에서 나오는 로그로 $\ln\frac{x-a}{x+a}$와 $\ln\frac{a-x}{a+x}$ 중 어느 것을 써야 할까?

이는 x가 어느 범위에 있느냐에 달려 있다. 상수해(constant solutions) $x = \pm a$는 $\dot{x} = 0$이 되는 곳이다. 처음에 $x = d$는 $-a$와 a 사이에 엄격히 놓여 있고, 거기서 출발한 해는 상수해 $x = \pm a$를 가로지를 수 없다(이와 같은 1계 방정식의 서로 다른 두 해는 만날 수 없다). 따라서 모든 시각에서 $-a < x < a$이다. 이 범위에서 $\dot{x} < 0$이므로 x는 감소하고, $a - x$와 $a + x$는 둘 다 양수이다.

$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\Big(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\Big)$를 이용하여 변수를 분리하면

$$\frac{1}{2a}\Big[\ln\frac{a-u}{a+u}\Big]_d^x = \tfrac{1}{2}kt \quad\Longrightarrow\quad \frac{a-x}{a+x} = A\,\mathrm{e}^{akt}, \qquad \text{여기서} A = \frac{a-d}{a+d}.$$

$a > d > 0$이므로 $0 < A < 1$임에 주의하자. x에 대해 풀면

$$x = a\,\frac{1 - A\mathrm{e}^{akt}}{1 + A\mathrm{e}^{akt}}, \qquad a = \sqrt{d^2 - \frac{2U}{k}}, \quad A = \frac{a-d}{a+d}.$$

이 식은 모든 $t \geq 0$에서 정의된다(분모가 양수이다). $\ln A = -2\,\mathrm{artanh}(d/a)$이므로, 이를 $x = a\tanh(\mathrm{artanh}(d/a) - \frac{1}{2}akt)$로 나타낼 수도 있다.

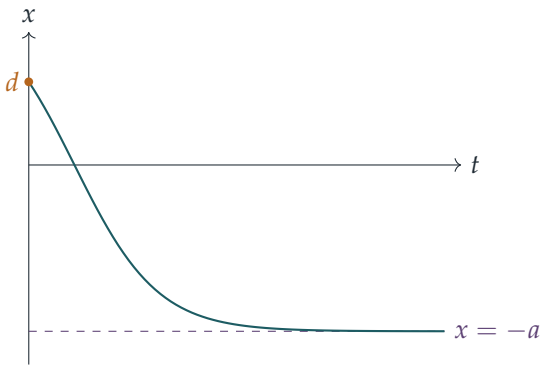
$t \to \infty$이면 $A > 0$이고 $ak > 0$이므로 $A\mathrm{e}^{akt} \to \infty$이다. 분자와 분모를 $A\mathrm{e}^{akt}$로 나누면

$$x = a\,\frac{A^{-1}\mathrm{e}^{-akt} - 1}{A^{-1}\mathrm{e}^{-akt} + 1} \longrightarrow -a.$$

따라서 x는 극한값

$$-a = -\sqrt{d^2 - \frac{2U}{k}}.$$

에 수렴한다. (이 극한값에는 k도 들어 있다. d와 U를 고정하고 k를 바꾸면 극한값이 바뀌므로, 이를 d와 U만으로 나타낼 수는 없다.)



이 그래프($d = 1, a = 2, k = 1$인 경우)는 입자가 음의 속도로 d에서 출발하여 원점을 지나고, 점점 느려지면서 $-a$에 다가가는 모습을 보여 준다.

검산

- 소문항 (i)에서 $t = 0$이면 $x = d\tan\frac{\pi}{4} = d$이고, 미분하면 $\dot{x} = \frac{1}{2}kd^2\sec^2\frac{\pi}{4} = kd^2 = U$이다.
- 소문항 (ii)에서 $t = 0$이면 $x = a\frac{1-A}{1+A} = d$이다. $U \to 0^-$이면 $a \to d$이고 $A \to 0$이므로 x는 d에 머문다. $x = d, \dot{x} = 0$이면 가속도가 0이 되므로 이는 옳다.
- 수치적으로, 임의의 k, d, U에 대해 룽게-쿠타 방법(Runge–Kutta method)으로 $\ddot{x} = kx\dot{x}$를 단계별로 계산해 보면 두 공식과 10^{-6}보다 작은 오차로 일치하였다. 예를 들어 $k = 1, d = 1, U = -1.5$이면 $a = 2$이고, 수치적으로 구한 x는 -2.000000에 안정된다.

흔한 실수

- 절댓값 없이 $\ln\frac{x-a}{x+a}$를 쓰는 것: $|x| < a$이면 이는 음수의 로그이다.
- 극한값으로 양의 제곱근을 택하는 것: x는 d에서부터 감소하므로 극한값은 $+a$가 아니라 $-a$이다.
- 가속도를 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$로 써서 $v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = kxv$를 얻은 뒤, $v \neq 0$임을 언급하지 않고 v로 나누는 것. 여기서는 결과가 맞지만, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$를 직접 적분하면 이 문제를 피할 수 있다.

STEP 너머

소문항 (i)은 **유한 시간 폭발**(*finite-time blow-up*)의 작은 예이다. f가 일차보다 빠르게(여기서는 이차로) 증가하는 방정식 $\dot{x} = f(x)$는 해를 유한한 시간 안에 무한대로 보낼 수 있으므로, 해가 모든 t에서 존재한다는 보장은 없다. 소문항 (ii)는 다른 행동을 보여 준다. 상수해 $x = \pm a$는 평형점(equilibria)이고, $-a$는 안정(stable)하며 $+a$는 불안정(unstable)하다. 위상선(phase line) 그림을 그려 보면 적분을 하기도 전에 극한값을 예측할 수 있다. 이 두 아이디어는, 해가 서로 가로지르지 못하게 하는 유일성 정리(uniqueness theorem)와 함께, Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에서 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.