풀이

STEP III 2003, 문제 1

순수수학 • 역쌍곡선함수의 적분

STEP III 2003, 1번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s3-q1

핵심 아이디어

처음 두 결과는 연쇄법칙(chain rule)을 꼼꼼히 적용하는 계산이다. 이 계산에서 얻는 쓸모 있는 것은 하나의 틀이다. 각 역함수(inverse function)의 도함수는 $\frac{\text{상수}}{(\text{일차식})\sqrt{\text{일차식}}}$ 꼴이고, 이것이 바로 두 피적분함수(integrand)의 꼴이다. 따라서 각 적분마다 이 틀에 맞도록 a와 b를 고른다. 근호 밖에 있는 괄호를 보면 어느 공식을 쓸지 알 수 있다. 그것이 더 큰 상수를 가진 $x+b$이면 arcsin을 쓰고, 더 작은 상수를 가진 $x+a$이면 arcosh를 쓴다.

풀이

두 도함수

$y = \dfrac{x+a}{x+b}$라 하자. 몫의 미분법(quotient rule)에 의해

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(x+b)-(x+a)}{(x+b)^2} = \frac{b-a}{(x+b)^2}.$$

$x+a>0$이고 $x+b>0$이므로 $y>0$이며, $b>a$이므로 분자가 분모보다 작다. 따라서 $0<y<1$이고, 이 범위에서 $\arcsin y$는 미분가능(differentiable)하다. 다음으로, 제곱의 차(difference of two squares)를 이용하면

$$1-y^2 = \frac{(x+b)^2-(x+a)^2}{(x+b)^2} = \frac{(b-a)(2x+a+b)}{(x+b)^2},$$

이다. $x+b>0$이므로 $(x+b)^2$의 제곱근은 $x+b$ 자신이고, 따라서

$$\sqrt{1-y^2} = \frac{\sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}}{x+b}.$$

연쇄법칙에 의해

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin\left(\frac{x+a}{x+b}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x+b}{\sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}}\cdot\frac{b-a}{(x+b)^2}$$
$$= \frac{\sqrt{b-a}}{(x+b)\sqrt{a+b+2x}},$$

이다. 여기서 $(b-a)/\sqrt{b-a} = \sqrt{b-a}$를 썼다. 이것이 구하려던 결과이다.

arcosh의 경우에는 $z = \dfrac{x+b}{x+a}$라 하자. $x+b > x+a > 0$이므로 $z > 1$이다. 그러면

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{(x+a)-(x+b)}{(x+a)^2} = -\frac{b-a}{(x+a)^2}, \qquad z^2-1 = \frac{(b-a)(2x+a+b)}{(x+a)^2}.$$

$x+a > 0$이므로 $\sqrt{z^2-1} = \sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}\,/(x+a)$이고, 따라서

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcosh}\left(\frac{x+b}{x+a}\right) = \frac{x+a}{\sqrt{b-a}\,\sqrt{a+b+2x}}\cdot\left(-\frac{b-a}{(x+a)^2}\right) = -\frac{\sqrt{b-a}}{(x+a)\sqrt{a+b+2x}}.$$

두 결과는 거의 비슷해 보인다. 차이는 부호와, 어느 괄호가 근호 밖에 있느냐뿐이다.

? **생각해 보기** arcsin 계산에서 실제로 쓰인 가정(hypothesis)은 어느 것인가?

$\sqrt{(x+b)^2}$을 간단히 하기 위해 $x+b > 0$이 필요했고, $1-y^2 > 0$도 필요했다. 인수분해한 꼴에서 보면, $b > a$일 때 $1-y^2 > 0$은 정확히 $a+b+2x > 0$일 때 성립한다. $x+a > 0$ 자체는 한 번도 쓰지 않았다. 따라서 arcsin 공식은 $x+b > 0$이고 $a+b+2x > 0$이기만 하면 $x+a$가 음수이더라도 성립하며, 이때 y는 $(-1, 0]$에 놓인다. 이 사실은 (ii)에서 중요하다.

소문항 (i)

근호 밖의 괄호는 $x+1$이므로, 이를 arcosh 공식의 $x+a$에 맞춰 본다. $\sqrt{x+3} = \sqrt{2x+6}\,/\sqrt{2}$로 쓰면, $a = 1$과 함께 $a+b = 6$이 필요하다. 그러면 $b = 5$이고 $b-a = 4$이다. 이 값들에 대해 가정 $x+a > 0$, $x+b > 0$, $b > a$는 $x > -1$에서 모두 성립하고,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcosh}\left(\frac{x+5}{x+1}\right) = -\frac{2}{(x+1)\sqrt{2x+6}} = -\frac{\sqrt{2}}{(x+1)\sqrt{x+3}}.$$

$-\sqrt{2}$로 나누면

$$\int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+3}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcosh}\left(\frac{x+5}{x+1}\right) + C.$$

소문항 (ii)

이번에는 밖의 괄호가 $x+3$이므로, 이를 arcsin 공식의 $x+b$에 맞춘다. 즉 $b = 3$이다. 근호 안에서는 $a+b+2x = 2(x+1)$이어야 하므로 $a+b = 2$이고 $a = -1$이다. 그러면

$b-a=4$이고

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin\left(\frac{x-1}{x+3}\right)=\frac{2}{(x+3)\sqrt{2x+2}}=\frac{\sqrt{2}}{(x+3)\sqrt{x+1}}.$$

생각해 보기 $a=-1$이면 가정 $x+a>0$은 $x>1$을 요구한다. 그래도 우리의 답이 범위 $x>-1$ 전체에서 성립하는가?

그렇다. 앞에서 보았듯이 arcsin 공식에는 $x+b>0$과 $a+b+2x>0$만 있으면 된다. 여기서 이 두 조건은 $x+3>0$과 $2x+2>0$이며, 둘 다 모든 $x>-1$에 대해 성립한다. 이 범위에서 $(x-1)/(x+3)$은 -1에서 1을 향해 증가하므로 arcsin이 정의된다. 따라서 $x>-1$에 대해

$$\int\frac{1}{(x+3)\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\frac{x-1}{x+3}\right)+C.$$

다른 방법: 치환

두 적분 모두 근호 안의 식을 $x+c$라 할 때 $u=\sqrt{x+c}$로 치환(substitution)해도 풀린다. 이때 $\mathrm{d}x=2u\,\mathrm{d}u$이기 때문이다. (ii)에서 $u=\sqrt{x+1}$로 두면 적분은 $\int\frac{2}{u^2+2}\,\mathrm{d}u=\sqrt{2}\arctan(\sqrt{(x+1)/2})+C$가 된다. 이것은 우리의 답과 상수 $-\pi/(2\sqrt{2})$만큼만 차이 난다. (i)에서 $u=\sqrt{x+3}$으로 두면 $\int\frac{2}{u^2-2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{2}}\right|+C$를 얻는다. 이것은 arcosh로 쓴 답을 로그로 나타낸 것과 정확히 같다.

검산

- 답을 다시 미분해 본다. 예를 들어 $x=0$에서 $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{x-1}{x+3}$의 도함수는 $\frac{1}{3}$이어야 하는데, 위의 공식은 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot3\cdot1}=\frac{1}{3}$을 준다.
- 수치적으로, 심프슨 공식(Simpson's rule)으로 계산하면 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x+3}}\approx0.374543$이고 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(x+3)\sqrt{x+1}}\approx0.240301$이다. 두 값 모두 원시함수(antiderivative)로 구한 값과 10^{-12}보다 작은 오차로 일치한다. 이 일치는 (ii)에서 $x+a<0$이 되는 범위 $-1<x<1$ 안쪽인 $x=-0.9$까지 내려가는 구간에서도 성립한다.
- 부호: (i)의 피적분함수는 양수이므로 그 적분은 증가해야 한다. 우리의 답은 실제로 증가한다. x가 증가하면 $\frac{x+5}{x+1}$이 감소하므로, 그 arcosh에 마이너스를 붙인 것은 증가하기 때문이다.

흔한 실수

- 괄호와 공식을 잘못 짝짓기: (i)에서 근호 밖의 $x+1$은 **더 작은** 상수를 가지므로 $x+a$여야 하고, 따라서 arcsin이 아니라 arcosh를 써야 한다.
- $\sqrt{x+3}$을 $\sqrt{2x+6}/\sqrt{2}$로 쓰면서 생기는 인수 $\sqrt{2}$를 빠뜨리기.
- $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x < 0$에서 나오는 arcosh 도함수의 마이너스 부호를 빠뜨리기.

STEP 너머

(ii)의 두 답, 즉 arcsin으로 쓴 답과 arctan으로 쓴 답은 상수만큼 차이 난다. 이것이 보장되는 까닭은 **구간**(interval)에서 도함수가 같은 두 함수는 상수만큼만 차이 나기 때문이며, 이는 평균값 정리(mean value theorem)의 결과이다. 서로 떨어진 두 조각으로 이루어진 집합에서는 그 상수가 조각마다 다를 수 있다. (i)에 로그가 나온 것도 우연이 아니다. 역쌍곡선함수(inverse hyperbolic function)는 모습을 바꾼 로그이며, 그래서 $1/\sqrt{\text{이차식}}$의 적분은 역삼각함수 아니면 로그가 된다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 평균값 정리를 꼼꼼하게 증명하고, Siklos의 *Advanced Problems in Mathematics*(STEP 대비 문제집)에는 이런 종류의 적분이 더 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.