풀이

STEP II 2003, 문제 9

역학 • 최대 정지 마찰과 평형

> **STEP II 2003, 9번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q9

핵심 아이디어

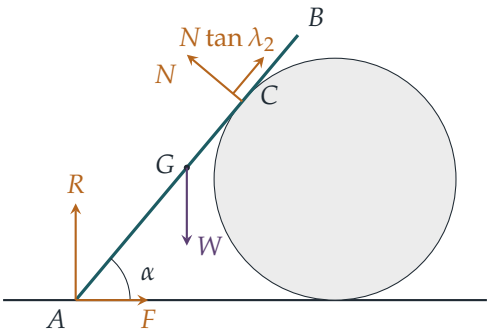
마찰계수(coefficient of friction)가 $\tan\lambda_1$과 $\tan\lambda_2$로 주어져 있으므로, 자연스러운 도구는 **전체 반력**(total reaction, 수직항력과 마찰력을 하나의 힘으로 합친 것)이다. 마찰이 한계 상태(limiting)일 때, 전체 반력은 법선과 마찰각(angle of friction) λ를 이룬다. 그러면 막대에는 방향을 알고 있는 세 힘만 작용하게 되고, 수평 방향과 수직 방향으로 분해(resolving)하면 미지의 크기 두 개에 대한 방정식 두 개를 얻는다. 실제로 해야 할 일은 각 마찰력이 어느 방향을 향하는지 정하는 것뿐이다.

풀이

모형과 마찰력의 방향

막대는 균일한 강체(rigid) 막대로, 원기둥은 고정된 것으로 본다. 막대는 원기둥에 접선(tangent)을 따라 닿으므로, C에서의 수직항력(normal reaction)은 막대에 수직이다. 원기둥이 A에서 수평 방향으로 양의 쪽에 있다고 하자. 그러면 막대에 작용하는 힘은 다음과 같다.

- 무게 W: 중점 G에서 연직 아래로 작용한다.
- A에서: 연직 위로 향하는 수직항력 R과 바닥을 따라 작용하는 마찰력(friction) F.
- C에서: 막대에 수직이고 위쪽, 그리고 A 쪽으로 향하는 수직항력 N과, 막대를 따라 작용하는 마찰력.



생각해 보기 A와 C에서 마찰력은 어느 방향으로 작용하는가? 막대가 반대 방향으로 미끄러지기 직전일 수도 있는가?

두 접촉을 유지하면서 막대가 움직일 수 있는 방식은 하나뿐이다. A가 바닥을 따라 미끄러지면 각 α가 변하고 막대는 원기둥 위를 미끄러진다. A가 원기둥에서 멀어지면 막대는 내려앉고(α가 감소하고), C에 있는 막대의 점은 원기둥에 대하여 막대를 따라 **아래로** 미끄러진다. A가 원기둥 쪽으로 움직이면 모든 것이 반대가 된다.

두 번째 경우라면 A에서의 마찰력은 원기둥에서 멀어지는 쪽을, C에서의 마찰력은 막대를 따라 아래쪽을 향할 것이다. 그러면 세 수평 방향 힘(A에서의 마찰력, N의 수평 성분, C에서의 마찰력의 수평 성분)이 모두 원기둥에서 멀어지는 쪽을 향하게 되어 수평 방향의 평형이 불가능하다. 따라서 극한 평형(limiting equilibrium)에서 막대는 아래로 미끄러지기 직전이다. 즉 A에서 막대에 작용하는 마찰력은 원기둥 **쪽으로**, C에서의 마찰력은 막대를 따라 **위쪽으로** 작용하며, 그림에 그린 그대로이다.

전체 반력

A에서의 전체 반력을 S, C에서의 전체 반력을 T라 하자. 두 접촉점 모두에서 마찰이 한계 상태이므로 다음이 성립한다.

- $F = R\tan\lambda_1$이므로, S는 위쪽 연직 방향과 각 λ_1을 이루며 원기둥 쪽으로 기울어 있다.
- 막대가 수평과 각 α를 이루므로, C에서의 법선은 위쪽 연직 방향과 각 α를 이루며 A 쪽으로 기울어 있다. 막대를 따라 위로 향하는 마찰력은 T를 연직 방향 쪽으로 λ_2만큼 돌려놓는다. 따라서 T는 원기둥에서 먼 쪽에서 재어 위쪽 연직 방향과 각 $\alpha - \lambda_2$를 이룬다.

막대에 대하여 힘을 분해하면

$$\begin{aligned} \text{수평 방향:} \quad & S\sin\lambda_1 = T\sin(\alpha - \lambda_2), \\ \text{수직 방향:} \quad & S\cos\lambda_1 + T\cos(\alpha - \lambda_2) = W. \end{aligned}$$

T를 소거하기 위해 첫째 식에 $\cos(\alpha-\lambda_2)$를, 둘째 식에 $\sin(\alpha-\lambda_2)$를 곱한 다음 둘째 식에서 첫째 식을 빼면

$$\begin{aligned} S\left[\cos\lambda_1\sin(\alpha-\lambda_2)+\sin\lambda_1\cos(\alpha-\lambda_2)\right] &= W\sin(\alpha-\lambda_2),\\ S\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2) &= W\sin(\alpha-\lambda_2), \end{aligned}$$

이다. 여기서 sin의 덧셈정리(addition formula)를 이용하였다. $\alpha\neq\lambda_2-\lambda_1$이라고 주어졌으므로 $\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)\neq 0$이다(모든 각이 예각이므로 $\alpha+\lambda_1-\lambda_2$는 $-\frac{\pi}{2}$와 π 사이에 엄격히 놓인다). 따라서 나눌 수 있고

$$S=\frac{W\sin(\alpha-\lambda_2)}{\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)}.$$

A에서의 마찰력은 S의 수평 성분, 즉 $F=S\sin\lambda_1$이므로

$$F=\frac{W\sin\lambda_1\,\sin(\alpha-\lambda_2)}{\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다. 같은 방법으로 $T=W\sin\lambda_1/\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)$이다.

생각해 보기 모멘트(moment)를 한 번도 잡지 않았다. 수상하지 않은가?

이 문제에서는 그렇지 않다. 두 방향으로 분해하는 것만으로 미지의 크기 두 개를 구하기에 충분하다. A에 대한 모멘트를 잡으면(S는 A에 대한 모멘트가 없고, 막대를 따라 작용하는 C에서의 마찰력도 마찬가지이다) $N=T\cos\lambda_2$와 함께 $N\cdot AC=W\cdot AG\cos\alpha$를 얻는다. 이것은 극한 평형이 되려면 C가 어디에 있어야 하는지만 알려 준다.

$$\frac{AC}{AB}=\frac{\cos\alpha\,\sin(\alpha+\lambda_1-\lambda_2)}{2\sin\lambda_1\cos\lambda_2}.$$

주어진 조건 $AC>CB$는 마찰력을 구하는 데에는 필요하지 않다. 물리적으로는 $S>0$과 $T>0$도 필요한데, 이는 정확히 $\alpha>\lambda_2$일 때 성립한다. λ_2보다 완만한 각도로 원기둥에 기대어 있는 막대는 원기둥을 따라 아래로 미끄러지기 직전일 수 없다.

검산

- 매끄러운 바닥, $\lambda_1=0$: 공식은 당연히 $F=0$을 준다.
- $\alpha=\lambda_2$: 이때 T는 연직 방향이고, T 혼자서 막대를 받치며 $F=0$이다. 이것은 막대가 원기둥에 겨우 기대어 있을 수 있는 경계 각도이다.
- 수치적으로 $\lambda_1=0.3$, $\lambda_2=0.5$, $\alpha=1.0$(라디안)으로 두고 성분 방정식을 R와 N에 대해 직접 풀면 $F\approx 0.1975W$를 얻으며, 공식과 일치한다. 이 경우 A에 대한 모멘트로부터 C는 막대의 약 0.75 지점에 놓이며, $AC>CB$와 모순되지 않는다.

흔한 실수

- C에서의 반력을 연직 방향이거나 원기둥의 "꼭대기"에 수직이라고 보는 것. 반력은 공통 접선, 즉 막대 자체에 수직이다.
- 마찰력의 방향을 확인하지 않고 정하는 것. 잘못된 조합을 고르면 수평 방향의 평형이 불가능해진다.
- C에서의 전체 반력을 반대쪽으로 기울이는 것. 그러면 $\alpha - \lambda_2$ 대신 $\alpha + \lambda_2$가 나온다.

STEP 너머

전체 반력을 법선과 각 λ를 이루도록 잡는 것은 **마찰 원뿔**(cone of friction)의 바탕이 되는 아이디어이다. 전체 반력이 법선을 축으로 하는 반각 λ의 원뿔 안에 머무는 한 접촉은 유지될 수 있다. 세 힘이 작용할 때는 작용선(line of action)들이 한 점을 지나야 하므로, 많은 정역학(statics) 문제가 기하 문제로 바뀐다. 거친 접촉이 여러 개 있어서 어느 쪽이 먼저 미끄러지는지가 중요한 문제들은 강체 정역학에 대한 좋은 입문이 된다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 마찰과 강체의 평형을 꼼꼼하게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.