풀이

STEP II 2003, 문제 8

순수수학 • 변수분리형 미분방정식

> **STEP II 2003, 8번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q8

핵심 아이디어

이 방정식은 1계(first order)이며 변수분리형(separable)이다. 즉 $\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$가 t에 대한 유리함수(rational function)와 같다. 이차식을 $t+1$로 나누면 그 함수는 다항식과 간단한 분수의 합으로 쪼개지고, 각 항은 곧바로 적분된다. 정상점(stationary point)은 해를 미분할 필요 없이 미분방정식(differential equation) 자체에서 바로 얻어진다. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0$인 곳은 정확히 이차식 t^2-3t+2가 0이 되는 곳이다.

풀이

y 구하기

다항식의 나눗셈(polynomial division)을 하면

$$\frac{t^2-3t+2}{t+1} = t-4+\frac{6}{t+1},$$

이다. 실제로 $(t+1)(t-4)+6 = t^2-3t-4+6 = t^2-3t+2$이기 때문이다.

해는 $y=A>0$에서 출발해야 한다. 만약 y가 어느 순간 0이 된다면, 이 선형 방정식의 해의 유일성(uniqueness)에 의해 그 해는 영해가 되어야 하고, 이는 $y(0)=A$에 모순이다. 따라서 (계수가 정의되는 $t>-1$에서) 항상 $y>0$이고, 양변을 y로 나눌 수 있다.

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -k\left(t-4+\frac{6}{t+1}\right).$$

0부터 t까지 적분하고 $\ln 1 = 0$을 이용하면

$$\ln\frac{y}{A} = -k\left(\frac{t^2}{2}-4t+6\ln(t+1)\right),$$

이므로

$$\boxed{y = A\,(t+1)^{-6k}\,\mathrm{e}^{-k(t^2/2-4t)} = A\,(t+1)^{-6k}\,\mathrm{e}^{k(8t-t^2)/2}}.$$

정상값

미분방정식으로부터

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -k\,\frac{(t-1)(t-2)}{t+1}\,y.$$

$k \neq 0$이라고 가정한다(그렇지 않으면 $y \equiv A$이고 모든 점이 정상점이다). $y > 0$이고 $t+1 > 0$이므로 도함수는 $t = 1$과 $t = 2$에서만 0이 되며, 각각이 단순근(simple root)이므로 두 점에서 모두 부호가 바뀐다. 따라서 정상값(stationary value)은 정확히 두 개이다.

$$y(1) = A \cdot 2^{-6k}\,\mathrm{e}^{-k(1/2-4)} = A \cdot 2^{-6k}\,\mathrm{e}^{7k/2},$$
$$y(2) = A \cdot 3^{-6k}\,\mathrm{e}^{-k(2-8)} = A \cdot 3^{-6k}\,\mathrm{e}^{6k}.$$

두 값의 비는

$$\frac{y(1)}{y(2)} = \frac{3^{6k}}{2^{6k}}\,\mathrm{e}^{7k/2-6k} = \left(\frac{3}{2}\right)^{6k}\mathrm{e}^{-5k/2},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

? **생각해 보기** 두 정상값 중 어느 것이 더 큰가?

로그를 취하면

$$\ln\frac{y(1)}{y(2)} = k\left(6\ln\tfrac{3}{2} - \tfrac{5}{2}\right),$$

이고 $6\ln 1.5 \approx 2.433 < 2.5$이므로 괄호 안은 음수(약 -0.067)이다. 따라서 $k > 0$이면 $y(1) < y(2)$이고 $k < 0$이면 $y(1) > y(2)$이다. 차이가 작으므로 그래프의 굴곡은 완만하다. 마찬가지로

$$\ln\frac{y(1)}{A} = k\left(\tfrac{7}{2} - 6\ln 2\right) \approx -0.659k, \qquad \ln\frac{y(2)}{A} = k(6 - 6\ln 3) \approx -0.592k,$$

이므로 $k > 0$이면 두 정상값 모두 A보다 작고, $k < 0$이면 모두 A보다 크다.

$t \to +\infty$일 때의 행동

다음과 같이 쓴다.

$$\ln\frac{y}{A} = -k\left(\frac{t^2}{2} - 4t + 6\ln(t+1)\right).$$

$t \to \infty$일 때 괄호 안은 $+\infty$로 발산하며, $\frac{1}{2}t^2$이 지배한다($\ln$ 항은 훨씬 느리게 증가한다). 따라서

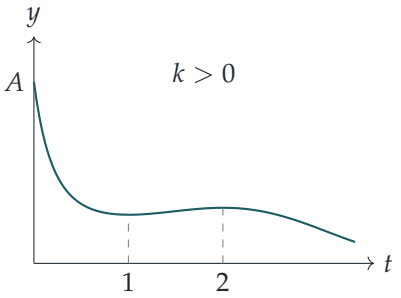
- $k > 0$이면 $\ln(y/A) \to -\infty$이므로 $y \to 0$이다($\mathrm{e}^{-kt^2/2}$처럼 매우 빠르게).
- $k < 0$이면 $\ln(y/A) \to +\infty$이므로 $y \to \infty$이다($\mathrm{e}^{|k|t^2/2}$처럼).

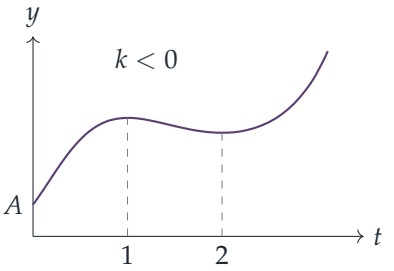
그래프 그리기

$t > 0$에서 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$의 부호는 $-k(t-1)(t-2)$의 부호와 같다.

- $k > 0$: y는 $(0,1)$에서 A부터 감소하여 $t = 1$에서 극솟값(local minimum)에 이르고, 증가하여 $t = 2$에서 극댓값(local maximum)에 이른 뒤(여전히 A보다 작다), 다시 0을 향해 감소한다.
- $k < 0$: y는 A부터 증가하여 $t = 1$에서 극댓값에 이르고, 감소하여 $t = 2$에서 극솟값에 이른 뒤(여전히 A보다 크다), 한없이 증가한다.

아래 그래프는 $A = 1, k = \pm 2$로 정확하게 그린 것이다.





검산

- $t = 0$에서 공식은 $A \cdot 1 \cdot \mathrm{e}^0 = A$를 준다. $\ln y = \ln A - 6k\ln(t+1) - k(t^2/2 - 4t)$를 미분하면 $\frac{y'}{y} = -\frac{6k}{t+1} - k(t-4)$이고, 이를 다시 정리하면 원래 방정식이 된다.
- 수치적으로, $A = 1.5, k = \pm 2$로 놓고 미분방정식을 단계별로 적분(룽게–쿠타(Runge–Kutta) 방법)하면 $t = 3$에서 공식과 유효숫자 여덟 자리까지 일치한다. $k = 2$일 때 비 $y(1)/y(2)$는 0.8742로, $(1.5)^{12}\mathrm{e}^{-5}$와 일치한다.

흔한 실수

- 나눗셈을 틀리는 경우: 나머지는 2가 아니라 6이다. 다시 $t+1$을 곱해서 확인하라.
- 비를 뒤집는 경우: 구하는 것은 $y(1)/y(2)$이며, 지수의 부호 때문에 실수로 $y(2)/y(1)$을 구하기 쉽다.
- 두 전환점(turning point)을 A의 반대쪽에 그리는 경우: 앞의 계산에 따르면 $k > 0$일 때는 둘 다 A보다 아래에, $k < 0$일 때는 둘 다 A보다 위에 있다.

STEP 너머

이 방정식은 선형(linear) 방정식 $y' + p(t)y = 0$이며, 그 해 $A\exp\left(-\int_0^t p\right)$는 적분인자법(integrating-factor method)의 가장 간단한 경우이다. 또한 이 문제는 상미분방정식(ODE) 첫 강의에서 만나게 될 일반적인 원리를 보여 준다. 즉 방정식을 풀지 않고도 정상점, 해의 부호, 증가나 감소와 같은 정성적 특징을 방정식에서 직접 읽어 낼 수 있는 경우가 많다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)는 두 아이디어를 모두 다루며, y가 결코 0이 되지 않음을 보일 때 사용한 유일성 정리도 포함하고 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.