풀이

STEP II 2003, 문제 7

순수수학 • 이상적분과 급수

STEP II 2003, 7번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s2-q7

핵심 아이디어

$\ln x \times$ (거듭제곱 꼴의 x) 꼴의 피적분함수(integrand)는 부분적분(integration by parts)에 안성맞춤이다. 로그를 미분하면 로그가 사라지기 때문이다. 이것으로 첫 번째 적분을 처리한다. 문제의 나머지 부분은 정확한 값 $2/(n^2\mathrm{e})$를 거꾸로 이용한다. 즉 이 값 덕분에 $1/n^2$을 적분으로 **나타낼** 수 있다. 그다음 모든 적분의 아래끝(lower limit)을 같은 곳으로 옮기는데, 이렇게 하면 각 적분은 커질 수밖에 없다. 마지막으로 적분 안에서 등비급수(geometric series)를 더한다.

풀이

적분

$a > 1, n > 0$일 때

$$I_n(a) = \int_a^\infty \frac{\ln x}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

이라 하자. $u = \ln x$, $\mathrm{d}v = x^{-n-1}\,\mathrm{d}x$로 놓고 부분적분하면 $v = -\frac{1}{n}x^{-n}$이다(여기서 $n \neq 0$을 이용한다). 구간 $[a, X]$에서

$$\begin{aligned}\int_a^X \frac{\ln x}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{\ln x}{nx^n}\right]_a^X + \frac{1}{n}\int_a^X x^{-n-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\ln a}{na^n} - \frac{\ln X}{nX^n} + \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{a^n} - \frac{1}{X^n}\right).\end{aligned}$$

이제 $X \to \infty$로 보내자. $n > 0$이므로 $X^{-n} \to 0$이다. 나머지 항에 대해서는 $Y = X^n$으로 놓으면 $\ln X = \frac{1}{n}\ln Y$이고

$$\frac{\ln X}{X^n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\ln Y}{Y} \to 0,$$

이다. $X \to \infty$일 때 $Y \to \infty$이고, $(\ln Y)/Y \to 0$은 가정해도 되기 때문이다. (여기서 $(\ln X)/X \to 0$을 그대로 인용할 수는 없다. $0 < n < 1$이면 X^n은 X보다 느리게 커지기 때문이다.) 따라서 이 적분은 수렴(converge)하고

$$I_n(a) = \frac{\ln a}{na^n} + \frac{1}{n^2 a^n}.$$

이다. $a = \mathrm{e}^{1/n}$에서는 $a^n = \mathrm{e}$, $\ln a = 1/n$이므로

$$I_n(\mathrm{e}^{1/n}) = \frac{1}{n^2\mathrm{e}} + \frac{1}{n^2\mathrm{e}} = \frac{2}{n^2\mathrm{e}},$$

이고, 이것이 구하는 결과이다.

두 적분의 비교

$1 < a < b$이면

$$I_n(a) - I_n(b) = \int_a^b \frac{\ln x}{x^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

이다. $x > 1$에서 $\ln x > 0$이고 $x^{n+1} > 0$이므로 피적분함수는 $[a, b]$에서 항상 양수이다. 또한 연속이고 $b > a$이므로 이 적분은 양수이다. 따라서 $I_n(b) < I_n(a)$이다. 아래끝을 오른쪽으로 옮기면 양의 넓이 한 조각을 버리는 셈이다.

부등식

첫 번째 부분에 의해 모든 양의 정수 n에 대하여

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\mathrm{e}}{2} I_n(\mathrm{e}^{1/n}).$$

이다.

생각해 보기 합의 각 항은 아래끝 $\mathrm{e}^{1/n}$이 서로 다르지만, 우변에는 아래끝이 $\mathrm{e}^{1/N}$ 하나뿐이다. 어떻게 한쪽에서 다른 쪽으로 넘어갈 수 있을까?

$1 \le n \le N$이라 하자. 그러면 $1/N \le 1/n$이므로 $1 < \mathrm{e}^{1/N} \le \mathrm{e}^{1/n}$이다. $n < N$이면 이 부등식은 등호 없이 성립하고, 두 번째 부분($a = \mathrm{e}^{1/N}$, $b = \mathrm{e}^{1/n}$)에 의해

$$I_n(\mathrm{e}^{1/n}) < I_n(\mathrm{e}^{1/N});$$

이다. $n = N$이면 양변이 같다. $n = 1, \ldots, N$에 대하여 더하면, $N > 1$이므로 $n < N$인 항이 적어도 하나(예를 들어 $n = 1$) 있어서 합에서도 등호가 성립하지 않는다.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\mathrm{e}}{2} \sum_{n=1}^{N} I_n(\mathrm{e}^{1/n}) < \frac{\mathrm{e}}{2} \sum_{n=1}^{N} I_n(\mathrm{e}^{1/N}).$$

바로 이 지점에서 $N > 1$이 필요하다. $N = 1$이면 양변이 같아진다.

이제 적분들을 더하는 일만 남았다. 같은 구간에서 수렴하는 적분들의 유한합은 합의 적분과 같으므로

$$\sum_{n=1}^{N} I_n(\mathrm{e}^{1/N}) = \int_{\mathrm{e}^{1/N}}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} x^{-(n+1)} \right) \ln x \, \mathrm{d}x.$$

이다. 괄호 안은 첫째항이 x^{-2}, 공비가 $x^{-1} \neq 1 (x > 1$이므로$)$이고 항이 N개인 등비급수이다.

$$\sum_{n=1}^{N} x^{-(n+1)} = \frac{x^{-2}(1 - x^{-N})}{1 - x^{-1}} = \frac{1 - x^{-N}}{x^2 - x},$$

여기서 마지막 등호는 분자와 분모에 x^2을 곱하여 얻는다. 그러므로

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} < \frac{\mathrm{e}}{2} \int_{\mathrm{e}^{1/N}}^{\infty} \left(\frac{1 - x^{-N}}{x^2 - x} \right) \ln x \, \mathrm{d}x,$$

이고, 이것이 증명하려던 것이다.

검산

- $I_n(a)$의 공식을 a에 대하여 미분해 보자. 미적분학의 기본정리(fundamental theorem of calculus)가 요구하는 대로 피적분함수에 음의 부호를 붙인 $-\ln a / a^{n+1}$이 나와야 한다.
- 수치로 확인해 보자. $x = \mathrm{e}^u$로 치환하면 마지막 부분의 적분은 $\int_{1/N}^{\infty} u(1 - \mathrm{e}^{-Nu}) / (\mathrm{e}^u - 1) \, \mathrm{d}u$가 된다. $N = 2$일 때 우변은 약 1.4865이고, 좌변은 $1 + \frac{1}{4} = 1.25$이다. $N = 10$일 때 우변은 약 2.0579이고, 좌변은 1.5498이다.
- $N \to \infty$이면 우변은 $\frac{\mathrm{e}}{2} \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2 - x} \, \mathrm{d}x$로 수렴하고, $x = 1/t$로 치환하면 이것은 $\frac{\mathrm{e}}{2} \int_0^1 \frac{-\ln t}{1 - t} \, \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} \approx 2.236$이 된다. 이 값은 마땅히 그래야 하듯 $\pi^2/6 \approx 1.645$보다 넉넉히 크다.

흔한 실수

- $(\ln X)/X^n$을 없애려고 $(\ln X)/X \to 0$을 그대로 쓰는 것. 이것은 $n \geq 1$일 때만 통하지만, 결과는 모든 $n > 0$에 대하여 주장되어 있다.
- 아래끝을 반대 방향으로 옮기는 것. $\mathrm{e}^{1/N}$은 $\mathrm{e}^{1/n}$들 가운데 **가장 작은** 값이므로 모든 적분이 커진다.
- 이유를 대지 않고 등호 없는 부등식을 주장하는 것. $n = N$인 항에서는 등호가 성립하므로, 등호가 빠지는 것은 $n < N$인 항들 덕분이며 이런 항은 $N > 1$이기 때문에 존재한다.

STEP 너머

수를 적분으로 나타낸 다음 적분 기호 안에서 합하는 것은 해석학(analysis)의 표준적인 기법이다. 이를 극한까지 밀고 가면 $\sum 1/n^2 = \int_0^1 \frac{-\ln t}{1-t}\,\mathrm{d}t$를 얻는데, 이것은 $\pi^2/6$에 이르는 한 가지 길이다. $N \to \infty$로 보내는 것은 무한합과 이상적분(improper integral)의 순서를 바꾸는 일이다. 이렇게 순서를 바꾸려면 단조 수렴 정리(monotone convergence theorem)나 지배 수렴 정리(dominated convergence theorem)를 통한 정당화가 필요하며, 이 정리들은 해석학 입문이나 측도론(measure theory) 강좌에서 배운다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 이해)는 이런 순서 교환이 왜 실패할 수 있는지, 그리고 언제 안전한지를 살펴보기에 좋은 친절한 책이다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.