풀이

STEP II 2003, 문제 6

순수수학 • 반복 함수와 적분

> **STEP II 2003, 6번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q6

핵심 아이디어

f를 한 번 더 적용한다는 것은 "1을 빼고, 음수가 된 부분은 축 위로 다시 뒤집어 올린다"는 뜻이다. 어떤 구간에서 값이 0과 1 사이에 있는 그래프에 이 조작을 하면, 그 구간은 띠 $0 \le y \le 1$ 안에서 그냥 위아래로 뒤집히고, 길게 뻗은 직선 팔에는 톱니가 하나 더 생긴다. 따라서 그래프는 지그재그, 곧 삼각파(triangle wave)가 되며, 이것을 알아차리면 마지막 소문항의 두 적분은 모두 똑같은 주기들 위에서의 합에 지나지 않는다.

풀이

그래프 그리기

두 가지 사실이 모든 일을 해낸다.

점화식(*recurrence*). $g_{n+1} = f \circ g_n$이므로 $g_{n+1}(x) = |g_n(x) - 1|$이다. 즉 g_n의 그래프를 아래로 1만큼 평행이동하고, x축 아래에 놓인 부분을 뒤집어 올리면 된다.

대칭성(*symmetry*). $f(2-x) = |1-x| = f(x)$이므로 $n \ge 2$일 때 $g_n(2-x) = g_{n-1}(f(2-x)) = g_{n-1}(f(x)) = g_n(x)$이고, $n = 1$일 때는 직접 확인된다. 따라서 모든 g_n은 직선 $x = 1$에 대하여 대칭이며, $x \ge 1$인 부분만 이해하면 충분하다.

먼저 $g_1(x) = |x-1|$은 꼭짓점이 $(1,0)$인 V자 모양이다.

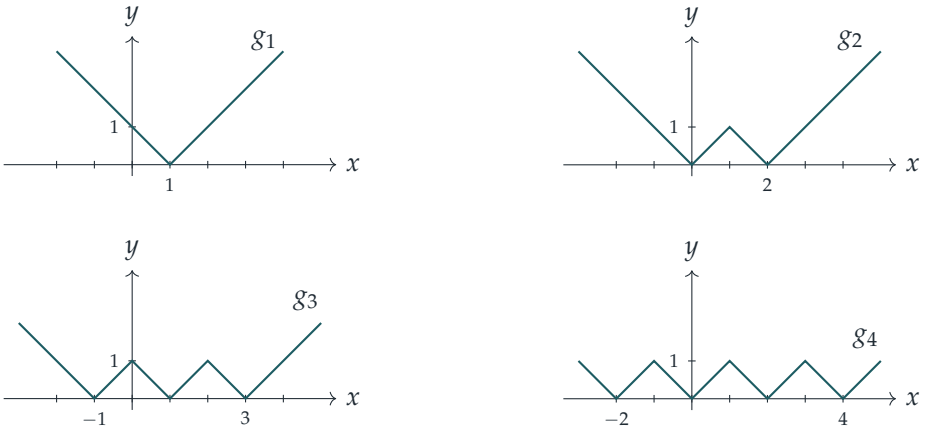
g_2의 경우: $[0,2]$에서 $0 \le g_1 \le 1$이므로 $g_2 = 1 - |x-1|$이다. 이것은 $x = 1$에서 1까지 올라가고 $x = 0$과 $x = 2$에서 0으로 내려오는 텐트 모양이다. $x \ge 2$일 때는 $g_2 = x - 2$이고, 대칭성에 의해 $x \le 0$일 때는 $g_2 = -x$이다. 따라서 g_2는 W자 모양이다.

그다음 단계마다 같은 일이 일어난다. 값이 $[0,1]$에 있는 지그재그 부분은 위아래로 뒤집히

고, 직선 팔 $x-n$은 $|x-n-1|$이 되어 $[n, n+1]$ 위에 (그리고 대칭성에 의해 $[1-n, 2-n]$ 위에) 톱니가 하나 더 생긴다. x에서 가장 가까운 짝수까지의 거리와 가장 가까운 홀수까지의 거리를 각각 $d_{\text{even}}(x)$, $d_{\text{odd}}(x)$로 쓰면 다음을 얻는다.

$$g_n(x) = \begin{cases} 2-n-x, & x \le 2-n, \\ d_{\text{even}}(x) \ (n\text{이 짝수일 때}),\ d_{\text{odd}}(x) \ (n\text{이 홀수일 때}), & 2-n \le x \le n, \\ x-n, & x \ge n. \end{cases}$$

이는 점화식으로부터 수학적 귀납법(induction)에 의해 따라 나온다. 모든 실수 x에 대하여 $d_{\text{even}} + d_{\text{odd}} = 1$이므로(연속한 두 정수 사이에서 두 거리는 t와 $1-t$이다), "1에서 지그재그를 뺀 것"은 홀짝성(parity)을 바꾼다. 또 $[n, n+1]$에서 새로 생긴 조각 $n+1-x$는 정확히 $n+1$까지의 거리이고, $n+1$은 새로운 홀짝성을 가진 가장 가까운 정수이다. 왼쪽 부분은 $x=1$에 대한 대칭성으로부터 따라 나온다.



말로 설명하면 다음과 같다. g_3은 $-1, 1, 3$에서 영점을 갖고 0과 2에서 높이 1인 봉우리를 가지며, 팔은 $y=-1-x$와 $y=x-3$이다. g_4는 $-2, 0, 2, 4$에서 영점을 갖고 $-1, 1, 3$에서 높이 1인 봉우리를 가지며, 팔은 $y=-2-x$와 $y=x-4$이다. 네 그래프는 모두 $x=1$에 대하여 대칭이다.

적분

n이 짝수라 하자. $n \ge 2$이므로 구간 $[0, n]$은 $[2-n, n]$ 안에 들어 있고, 따라서 그 위에서 $g_n(x) = d_{\text{even}}(x)$이다.

> **생각해 보기** 왜 $[0, 2]$에서만 적분해도 충분할까?

두 함수 모두 주기(period)가 2이다. 2만큼 평행이동하면 짝수는 짝수로 옮겨지므로 $d_{\text{even}}(x+2) = d_{\text{even}}(x)$이고, $\left|\sin \frac{\pi(x+2)}{2}\right| = \left|-\sin \frac{\pi x}{2}\right| = h(x)$이다. n이 짝수이므로

$[0,n]$은 정확히 $\frac{n}{2}$개의 온전한 주기 $[0,2],[2,4],\ldots,[n-2,n]$으로 이루어진다. 따라서 $[0,n]$에서의 각 적분은 $[0,2]$에서의 적분의 $\frac{n}{2}$배이다.

$[0,2]$에서 g_n은 텐트 $1-|x-1|$, 즉 밑변이 2이고 높이가 1인 삼각형이므로

$$\int_0^2 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1 = 1.$$

$[0,2]$에서 $\frac{\pi x}{2}\in[0,\pi]$이므로 $\sin\frac{\pi x}{2}\geq 0$이고, 절댓값(modulus)을 없앨 수 있다.

$$\int_0^2 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \sin\frac{\pi x}{2}\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi x}{2}\Big]_0^2 = \frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi} = \frac{4}{\pi}.$$

따라서

$$\int_0^n \big(h(x)-g_n(x)\big)\,\mathrm{d}x = \frac{n}{2}\Big(\frac{4}{\pi}-1\Big) = \frac{2n}{\pi}-\frac{n}{2},$$

이므로 증명이 끝난다.

검산

- 값 하나를 골라 손으로 반복 적용해 본다. $g_4(-1)$: $-1\to 2\to 1\to 0\to 1$이므로 $g_4(-1)=1$이고, 그림에서처럼 봉우리이다.
- $4/\pi\approx 1.27>1$이므로 답은 양수이다. 사인 아치는 밑변과 높이가 같은 곧은 변의 텐트보다 위로 볼록하게 솟아 있으며, 이는 두 그래프의 그림과 일치한다.
- 수치적으로, $n=2$일 때 심프슨 공식(Simpson's rule)은 0.273240을 주며, 이는 $\frac{4}{\pi}-1\approx 0.273240$과 일치한다. $n=4,6,8,10$에서도 마찬가지로 일치한다.

흔한 실수

- 왼쪽 부분을 잊는 것: $n\geq 3$이면 $x<0$에서 그래프는 직선이 아니다. 대칭성 $g_n(2-x)=g_n(x)$을 이용하는 것이 이 부분을 바르게 그리는 가장 빠른 방법이다.
- $\sin\frac{\pi x}{2}$를 절댓값 없이 $[0,n]$에서 적분하는 것: 그러면 짝수 n에 대하여 $\frac{2n}{\pi}$ 대신 0이 나온다.

STEP 너머

간단한 사상을 반복 적용하면서 그래프가 어떻게 변하는지 지켜보는 것은 이산 동역학계(discrete dynamical systems)의 출발점이다. 여기서 지그재그는 삼각파로 자리 잡으며, 이와 밀접하게 관련된 "텐트 사상(tent map)"은 혼돈(chaos)의 고전적인 예이다. h와 삼각파를 비교하는 것은 또한 푸리에 급수(Fourier series)를 가리킨다. 푸리에 급수에서는

삼각파를 사인과 코사인의 합으로 나타내며, |sin|은 가장 먼저 다루는 예 가운데 하나이다. Boyce와 DiPrima의 *Elementary Differential Equations*(기초 미분방정식)에는 푸리에 급수에 대한 읽기 쉬운 입문이 실려 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.