풀이

STEP II 2003, 문제 5

순수수학 • 직선의 벡터 기하

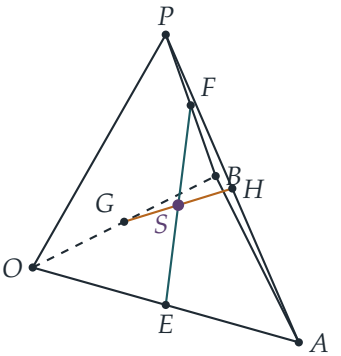
STEP II 2003, 5번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

step.maths.org/questions/03-s2-q5

핵심 아이디어

네 중점(midpoint)을 적고, 각 직선을 "점 + 매개변수 × 방향" 꼴로 나타낸 다음 둘을 같다고 놓는다. 3차원 공간의 두 직선은 보통 서로 만나지 않으므로, 핵심은 두 미지 매개변수(parameter)에 대한 세 성분(component) 방정식이 모순 없이 동시에 성립함(consistent)을 보이는 데 있다. $\mathbf{k}$ 성분을 보면 빠르게 정리된다. 기하학적으로 보면 O, A, B, P는 사면체(tetrahedron)를 이루고, EF와 GH는 각각 마주 보는 한 쌍의 모서리의 중점을 잇는다. 그러므로 두 직선이 네 꼭짓점의 "평균"에서 만난다고 짐작할 수 있다.



풀이

직선 EF와 GH는 만난다

$\mathbf{p} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$라 하자. 중점들의 위치벡터(position vector)는 다음과 같다.

$$\mathbf{e} = \tfrac{1}{2}a\mathbf{i}, \qquad \mathbf{f} = \tfrac{1}{2}(l\mathbf{i} + (b+m)\mathbf{j} + n\mathbf{k}),$$
$$\mathbf{g} = \tfrac{1}{2}b\mathbf{j}, \qquad \mathbf{h} = \tfrac{1}{2}((a+l)\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}).$$

EF 위의 일반적인 점은 $\mathbf{e} + s(\mathbf{f} - \mathbf{e})$이고, GH 위의 일반적인 점은 $\mathbf{g} + t(\mathbf{h} - \mathbf{g})$이다. 분모의 2를 없애기 위해 둘 다 두 배 하면

$$2(\mathbf{e} + s(\mathbf{f} - \mathbf{e})) = (a + s(l-a))\mathbf{i} + s(b+m)\mathbf{j} + sn\,\mathbf{k},$$
$$2(\mathbf{g} + t(\mathbf{h} - \mathbf{g})) = t(a+l)\mathbf{i} + (b + t(m-b))\mathbf{j} + tn\,\mathbf{k}.$$

두 직선이 만날 필요충분조건은 이 둘을 같게 하는 s와 t의 값이 존재하는 것이므로, 다음 세 식이 모두 성립해야 한다.

$$\mathbf{i}: \quad a + s(l-a) = t(a+l),$$
$$\mathbf{j}: \quad s(b+m) = b + t(m-b),$$
$$\mathbf{k}: \quad sn = tn.$$

생각해 보기 미지수는 두 개인데 방정식은 세 개이다. 도대체 왜 해가 존재해야 하는가?

일반적으로는 해가 없고, 바로 그래서 공간의 두 직선은 보통 서로 만나지 않는다. 여기서는 두 방정식을 풀고 나머지 하나도 성립하는지 확인한다. $n \neq 0$이므로 $\mathbf{k}$ 방정식에서 $s = t$를 얻는다. 그러면 $\mathbf{i}$ 방정식은 $a + sl - sa = sa + sl$이 되어 $a = 2sa$이고, $a \neq 0$이므로 $s = \frac{1}{2}$이다. 마지막으로 $s = t = \frac{1}{2}$일 때 $\mathbf{j}$ 방정식은

$$\tfrac{1}{2}(b+m) = b + \tfrac{1}{2}(m-b) = \tfrac{1}{2}(b+m),$$

이 되어 참이다. 따라서 $s = t = \frac{1}{2}$일 때 세 방정식이 모두 성립하고, 요구한 대로 직선 EF와 GH는 만난다.

교점은 EF의 중점(또한 GH의 중점)이다.

$$\mathbf{s} = \tfrac{1}{4}((a+l)\mathbf{i} + (b+m)\mathbf{j} + n\mathbf{k}) = \tfrac{1}{4}(\mathbf{0} + a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + \mathbf{p}),$$

즉 O, A, B, P의 위치벡터의 평균이다.

점 T

S가 DT의 중점이므로 $\mathbf{s} = \frac{1}{2}(\mathbf{d} + \mathbf{t})$이고, 따라서 $\mathbf{t} = 2\mathbf{s} - \mathbf{d}$이다.

$$\mathbf{t} = \tfrac{1}{2}(a+l)\,\mathbf{i} + \tfrac{1}{2}(b+m)\,\mathbf{j} + (\tfrac{1}{2}n - d)\mathbf{k}.$$

평면 OAB는 O를 지나고 벡터 $a\mathbf{i}$와 $b\mathbf{j}$를 포함한다. a와 b가 0이 아니므로 이 벡터들은 각각 x축과 y축 방향이고, 따라서 평면 OAB는 평면 $z=0$이다. 그러므로 T가 이 평면 위에 있을 필요충분조건은 $\mathbf{k}$ 성분이 0이 되는 것, 즉 $\frac{1}{2}n-d=0$이다. 따라서

$$d=\tfrac{1}{2}n.$$

$n\neq 0$이므로 이 값은 0이 아니고, 따라서 조건 $d\neq 0$과도 모순되지 않는다.

검산

- $a=2, b=4, \mathbf{p}=(2,0,4)$로 잡자. 그러면 $E=(1,0,0)$, $F=(1,2,2)$, $G=(0,2,0)$, $H=(2,0,2)$이다. EF와 GH의 중점은 둘 다 $(1,1,1)$이고, 이는 $\frac{1}{4}\big((0,0,0)+(2,0,0)+(0,4,0)+(2,0,4)\big)$이다.
- $d=2=\frac{1}{2}n$이면 $T=2(1,1,1)-(0,0,2)=(2,2,0)$이고, 이 점은 $z=0$ 위에 있다.
- 컴퓨터로 a,b,l,m,n,d를 무작위로 20 000번 골라 정확한 유리수 연산으로 확인한 결과, 두 직선은 $s=t=\frac{1}{2}$에서 위의 점에서 만나며, T가 평면 OAB 위에 있을(스칼라 삼중곱(scalar triple product)이 0일) 필요충분조건이 $d=\frac{1}{2}n$임을 확인했다.

흔한 실수

- 처음부터 두 직선에 **같은** 매개변수를 써서 같다고 놓는 것. 이는 답 $s=t$를 미리 가정하는 것인데, 여기서 이 사실은 $\mathbf{k}$ 방정식에서 나온다.
- 성분 방정식 두 개만 풀고 멈추는 것. 공간의 두 직선이 만남을 보이려면 세 번째 방정식도 확인해야 한다.
- $a\neq 0$과 $n\neq 0$을 어디에 썼는지 밝히지 않는 것. 이 조건들이 있어야 나눗셈을 하여 s와 t를 구할 수 있다.

STEP 너머

임의의 사면체에서 마주 보는 모서리의 중점을 잇는 세 직선(**이중중선**(bimedian))은 모두 무게중심(centroid), 즉 네 꼭짓점의 평균을 지나고, 각 선분은 그 점에서 이등분된다. 이는 삼각형의 중선(median)들이 무게중심에서 만난다는 사실의 3차원판이며, 점을 가중평균으로 생각하는 관점, 즉 무게중심 좌표(barycentric coordinates)와 아핀 좌표(affine coordinates)의 바탕이 되는 아이디어를 처음 맛보는 것이다. 스트랭(Strang)의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수학 입문)는 여기서 사용한 벡터와 연립일차방정식의 관점을 발전시키며, 미지수보다 방정식이 많은 연립방정식이 언제 해를 갖는지도 다룬

다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.