풀이

STEP II 2003, 문제 4

순수수학 • 활꼴의 넓이

> **STEP II 2003, 4번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q4

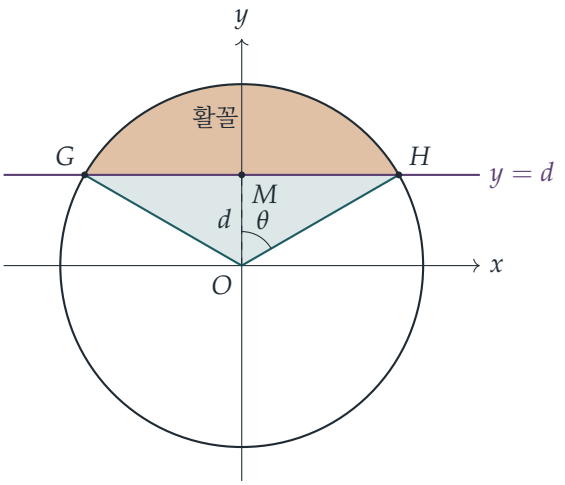
핵심 아이디어

작은 활꼴(minor segment)은 부채꼴(sector)에서 삼각형을 떼어 낸 것이므로, 첫 번째 결과는 그저 "부채꼴 빼기 삼각형"이다. 나머지 부분에서는 $(*)$에 나오는 수 d가 사실은 **원의 중심에서 직선까지의 수직 거리**(*perpendicular distance*)라는 점에 주목한다. 그림을 평행이동하거나 회전해도 넓이는 변하지 않으므로, 모든 경우에 $(*)$를 그대로 두고 d를 그 거리로 바꾸면 된다. 할 일은 모두 거리를 계산하는 데 있다.

풀이

기본 결과

직선이 원과 두 점에서 만나므로 $0 < d < R$이다. $x^2 + y^2 = R^2$에 $y = d$를 대입하면 $x = \pm\sqrt{R^2 - d^2}$이므로 $G = (-\sqrt{R^2 - d^2},\, d)$, $H = (\sqrt{R^2 - d^2},\, d)$이다. $M = (0, d)$을 GH의 중점이라 하고, $\theta = \angle MOH$라 하자.



직각삼각형 OMH에서 빗변은 $OH = R$이고 이웃변은 $OM = d$이므로 $\cos\theta = d/R$이다. $0 < d/R < 1$이므로 $\theta = \arccos(d/R)$이고 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이며, 대칭성에 의해 $\angle GOH = 2\theta < \pi$이다.

중심각이 2θ인 부채꼴 OGH의 넓이는

$$\tfrac{1}{2}R^2(2\theta) = R^2\arccos\left(\frac{d}{R}\right).$$

이다. 삼각형 OGH는 밑변이 $GH = 2\sqrt{R^2 - d^2}$, 높이가 $OM = d$이므로 그 넓이는 $d\sqrt{R^2 - d^2}$이다. $2\theta < \pi$이므로 중심 O는 현(chord) GH에 대해 작은 호와 반대쪽에 있고, 따라서 부채꼴은 정확히 삼각형과 작은 활꼴을 합친 것이다. 그러므로

$$\text{작은 활꼴의 넓이} = R^2\arccos\left(\frac{d}{R}\right) - d\sqrt{R^2 - d^2},$$

이고, 이것이 $(*)$이다.

생각해 보기 기하적으로 볼 때 $(*)$에서 d는 실제로 무엇을 나타내는가?

위 논증에서는 좌표축을 전혀 사용하지 않았다. 사용한 것은 반지름 R과 중심에서 현까지의 거리 $OM = d$뿐이다. 그림 전체를 평행이동하거나 회전해도 이 두 값은 보존되고, 넓이도 보존된다. 따라서 반지름이 R인 임의의 원과 중심에서의 수직 거리가 p인 임의의 직선에 대하여, $0 \le p < R$일 때 작은 활꼴의 넓이는

$$R^2\arccos\left(\frac{p}{R}\right) - p\sqrt{R^2 - p^2}. \qquad (\dagger)$$

이다. ($p = 0$이면 직선은 지름이고, 두 조각은 똑같은 반원이며, $(\dagger)$는 올바르게 $\frac{1}{2}\pi R^2$을 준다.) 각 소문항에서는 p를 구해 $(\dagger)$에 대입한다.

소문항 (i)

중심은 (a, b)이고 직선 $y = c$는 수평이므로, 중심에서 직선까지의 거리는 $p = |c - b|$이다. d를 $|c - b|$로 바꾸면

$$R^2 \arccos\left(\frac{|c-b|}{R}\right) - |c-b|\sqrt{R^2 - (c-b)^2}.$$

이다. 절댓값이 중요하다. c가 b보다 작을 수도 있기 때문이다.

소문항 (ii)

여기서는 중심이 O이다. O에서 $y = mx + c$까지의 거리를 구해야 한다. 직선이 x축과 이루는 각을 α라 하면 $\tan\alpha = m$이고, 직선이 y축과 만나는 점을 $C = (0, c)$라 하자. O에서 직선에 수선을 내려 그 발을 F라 하자. OC(수직 방향)와 OF(직선에 수직)가 이루는 각은 수평선과 직선이 이루는 각, 즉 α와 같다. 따라서 직각삼각형 OFC에서

$$p = OF = |c|\,|\cos\alpha| = \frac{|c|}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}} = \frac{|c|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

이다. (이는 직선 $mx - y + c = 0$과 점 $(0,0)$에 대한 익숙한 공식 $|Ax_0 + By_0 + C|/\sqrt{A^2+B^2}$이다.) 그러면

$$\sqrt{R^2 - p^2} = \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{1+m^2}} = \frac{\sqrt{R^2(1+m^2) - c^2}}{\sqrt{1+m^2}},$$

이므로 작은 활꼴의 넓이는

$$R^2 \arccos\left(\frac{|c|}{R\sqrt{1+m^2}}\right) - \frac{|c|\sqrt{R^2(1+m^2) - c^2}}{1+m^2}.$$

이다. 직선이 원과 만나는 것은 정확히 $c^2 < R^2(1+m^2)$일 때이므로, 제곱근 안은 실수가 된다.

소문항 (iii)

$X = x - a, Y = y - b$로 놓아 원점을 중심으로 옮긴다. 원은 $X^2 + Y^2 = R^2$이 되고 직선은

$$Y + b = m(X + a) + c \quad \Longleftrightarrow \quad Y = mX + k, \qquad k = c + ma - b.$$

이 된다. 이는 소문항 (ii)에서 c를 k로 바꾼 것이고, 평행이동은 넓이를 바꾸지 않는다. 따라서 $p = |c + ma - b|/\sqrt{1+m^2}$이고, 작은 활꼴의 넓이는

$$R^2 \arccos\left(\frac{|c+ma-b|}{R\sqrt{1+m^2}}\right) - \frac{|c+ma-b|\sqrt{R^2(1+m^2) - (c+ma-b)^2}}{1+m^2}.$$

이다. $m = 0$을 대입하면 소문항 (i)이 다시 나오고, $a = b = 0$을 대입하면 소문항 (ii)가 다시 나온다.

생각해 보기 소문항 (i)에서 왜 절댓값 없이 그냥 $c - b$라고 쓸 수 없는가?

$c < b$이면 $(c-b)/R$은 음수이고, arccos는 $\frac{\pi}{2}$보다 큰 각 $\pi - \theta$를 돌려주며, 둘째 항의 부호가 바뀐다. 식은 $R^2(\pi - \theta) + p\sqrt{R^2 - p^2}$가 되는데, 이는 작은 활꼴이 아니라 **큰 활꼴**(*major segment*)의 넓이이다.

검산

- $R = 2, d = 1$이면 $\theta = \frac{\pi}{3}$이고, $(*)$는 $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2.4567$을 준다. 이는 원판 넓이의 절반 $(2\pi \approx 6.28)$보다 작으므로 마땅히 그래야 하는 결과이다.
- $d \to R$이면 넓이는 0으로 가고, $d = 0$이면 $\frac{1}{2}\pi R^2$과 같다.
- 수백 개의 무작위 원과 직선에 대해 현의 길이를 직접 수치 적분하여 네 공식을 모두 확인하였다. 오차는 2×10^{-6} 이내였다.

흔한 실수

- 절댓값을 빠뜨리는 것. 부호가 있는 거리를 쓰면 중심이 직선의 "잘못된" 쪽에 있을 때마다 큰 활꼴의 넓이가 나온다.
- 소문항 (ii)와 (iii)에서 수직 거리 $|c|/\sqrt{1+m^2}$ 대신 세로 간격 $|c|$를 쓰는 것.
- 중심각이 θ가 아니라 2θ임을 잊고 부채꼴의 넓이로 $\frac{1}{2}R^2\theta$를 쓰는 것.

STEP 너머

이 문제는 넓이가 **등거리변환**(*isometry*), 즉 평면의 평행이동, 회전, 반사에 의해 변하지 않는다는 사실에 바탕을 둔다. 대학 1학년 과정에서는 이것이 등거리변환의 야코비 행렬식(Jacobian determinant)의 절댓값이 1이라는 명제가 되며, 따라서 이중적분의 변수변환 공식(change-of-variables formula)이 넓이를 바꾸지 않는다. 등거리변환과 그것이 보존하는 양을 분류하는 일은 기하학과 군론(group theory)으로 들어가는 좋은 길이다. Strang의 *Introduction to Linear Algebra*(선형대수 입문)는 회전 행렬과 넓이의 배율로서의 행렬식을 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.