풀이

STEP II 2003, 문제 3

순수수학 • 무리수와 수학적 귀납법

> **STEP II 2003, 3번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q3

핵심 아이디어

무리수임(irrationality)은 "아니다"라는 성질이므로 대우(contrapositive)가 자연스러운 도구이다. 무리수의 세제곱근(cube root)이 무리수임을 보이는 대신, 세제곱근이 유리수(rational)이면 그 수 자체도 유리수일 수밖에 없음을 보인다. 각 u_{n+1}이 u_n의 세제곱근이므로, 이 사실 하나가 그대로 귀납법(induction)을 이끌어 간다. 마지막 부분에서는 $u_n \to 1$임에 주목하고 수열(sequence) 전체를 정수만큼 평행이동한다. 이렇게 해도 모든 항은 여전히 무리수이다.

풀이

무리수의 세제곱근

x를 실수라 하고 $y = \sqrt[3]{x}$를 x의 실수 세제곱근이라 하자. 그러면 $y^3 = x$이다. 대우를 증명한다. 즉 y가 유리수이면 x도 유리수임을 보인다.

p, q가 정수이고 $q \neq 0$일 때 $y = \dfrac{p}{q}$라 하자. 그러면

$$x = y^3 = \frac{p^3}{q^3},$$

이고 p^3과 q^3은 정수이며 $q^3 \neq 0$이다. 따라서 x는 두 정수의 비, 즉 유리수이다.

그러므로 유리수인 세제곱근은 유리수에서만 나올 수 있다. 이를 바꾸어 말하면, x가 무리수이면 $\sqrt[3]{x}$는 유리수일 수 없으므로 무리수이다. 이것이 증명해야 할 내용이었다.

? **생각해 보기** 왜 주어진 명제를 직접 공략하지 않는가?

직접 증명하려면 "x는 정수의 비가 아니다"에서 출발해야 하는데, 여기에는 구체적으로 계산할 거리가 전혀 없다. 대우는 "$y = p/q$"에서 출발하므로 다룰 정수가 손에 들어오고, 증명은 한 줄로 끝난다. 가정이 어떤 것이 유리수가 **아니라고** 말할 때는 언제나 대우나 귀류법(proof by contradiction)을 시도해 볼 가치가 있다.

귀납법

$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n$이므로 지수법칙(laws of indices)에 의해

$$u_{n+1} = 5^{1/3^{n+1}} = \left(5^{1/3^n}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{u_n}.$$

이다. 따라서 각 항은 바로 앞 항의 세제곱근이다.

기초 단계(*base case*). $u_1 = 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$이고, 이 수는 무리수라고 주어져 있다.

귀납 단계(*inductive step*). 어떤 양의 정수 k에 대하여 u_k가 무리수라고 가정하자. 그러면 $u_{k+1} = \sqrt[3]{u_k}$는 무리수의 세제곱근이므로, 첫 번째 부분에 의해 무리수이다.

따라서 수학적 귀납법에 의해 모든 양의 정수 n에 대하여 u_n은 무리수이다.

m으로 수렴하는 수열

먼저 u_n의 극한(limit)을 구한다. 로그(logarithm)를 취하면

$$\ln u_n = \frac{\ln 5}{3^n} \to 0 \quad \text{단, } n \to \infty,$$

이고, 지수함수(exponential function)는 연속(continuous)이므로 $u_n = \mathrm{e}^{\ln u_n} \to \mathrm{e}^0 = 1$이다. 또한 $\ln u_n > 0$이므로 모든 n에 대하여 $u_n > 1$이다. 각 항은 1을 향해 감소한다.

$$u_1 \approx 1.710, \quad u_2 \approx 1.196, \quad u_3 \approx 1.061, \quad u_4 \approx 1.020, \ldots$$

> ? **생각해 보기** 무리수라는 성질을 해치지 않으면서 극한을 1에서 m으로 옮기려면 어떻게 해야 하는가?

무리수에 정수를 더하면 무리수가 된다. 실제로 a가 정수이고 $u + a = r$가 유리수라면, 유리수끼리의 차는 유리수이므로 $u = r - a$도 유리수가 된다.

그러므로 주어진 정수 m에 대하여

$$a_n = u_n + m - 1 = 5^{1/3^n} + m - 1.$$

으로 정의한다. $m - 1$은 정수이고 u_n은 무리수이므로 각 a_n은 무리수이며,

$$a_n \to 1 + m - 1 = m \quad \text{단, } n \to \infty.$$

이다. 따라서 (a_n)은 m으로 수렴(converge)하는 무리수들의 무한수열이다. 이 방법은 $m = 0$을 포함한 모든 정수 m에 대하여 성립한다.

(또 다른 자연스러운 선택인 $m\,u_n$도 무리수이고 m으로 수렴하지만, 이는 $m \neq 0$일 때에만 그렇다. $m = 0$이면 모든 항이 0이 되어 유리수이다. 그래서 $m - 1$만큼 평행이동하는 쪽이 더 안전한 답이다.)

검산

- 수치적으로 $u_2^3 \approx 1.19581^3 \approx 1.70998 \approx u_1$이므로 $u_{n+1} = \sqrt[3]{u_n}$이 확인된다.
- $m = 4$이면 $a_1 \approx 4.710$, $a_2 \approx 4.196$, $a_3 \approx 4.061$이고, a_{20}은 소수점 아래 여덟 자리 넘게 4와 일치한다.
- 차 $a_n - m = u_n - 1$은 양수이고 대략 $\ln 5/3^n$이므로, 한 단계마다 약 3분의 1로 줄어든다.

흔한 실수

- 역(converse), 즉 "무리수의 세제곱은 무리수이다"를 증명하는 것. 이는 거짓이다: $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$.
- $m = 0$일 때 실패한다는 점을 알아차리지 못하고 $m\,u_n$을 사용하는 것.
- $u_n \to 1$임을 정당화하는 것을 잊는 것. "지수가 0으로 간다"는 말만으로는 부족하고, 연속성에 대한 언급이나 위의 로그를 이용한 논증이 필요하다.

STEP 너머

이 문제는 무리수가 실수직선에서 **조밀하다**(dense)는 것을 보여 준다. 즉 모든 정수뿐 아니라 모든 실수가 무리수들의 극한이다(유리수 $q_n \to x$에 대하여 $q_n + \sqrt{2}/n$을 생각해 보라). 유리수 역시 조밀하지만, 정확한 의미에서 무리수가 유리수보다 훨씬 많다. 유리수는 가산(countable)이지만 실수는 그렇지 않기 때문이다. Abbott의 *Understanding Analysis*(해석학 입문서)는 앞쪽 장들에서 조밀성, 가산성, 수열의 극한을 아름답게 다룬다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.