풀이

STEP II 2003, 문제 2

순수수학 • 역삼각함수

> **STEP II 2003, 2번 문제**
>
> 더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:
>
> step.maths.org/questions/03-s2-q2

핵심 아이디어

식 $a\cos\theta + b\sin\theta$는 언제나 하나의 코사인 $R\cos(\theta - \alpha)$ 꼴로 쓸 수 있다. 이렇게 하면 주어진 방정식은 arccos에 관한 명제가 되고, α 자체는 arctan으로 나타난다. 따라서 깔끔한 해 θ를 하나 찾아내기만 하면, π에 관한 항등식은 "$\theta = (\theta - \alpha) + \alpha$"를 다시 쓴 것에 지나지 않는다. 정말로 주의해야 할 점은 각 각이 우리가 사용하는 역함수(inverse function)의 치역(range) 안에 있는지 확인하는 것뿐이다.

풀이

첫 번째 항등식

$(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ 안의 뻔한 각들을 대입해 보자. $\theta = \frac{1}{3}\pi$이면

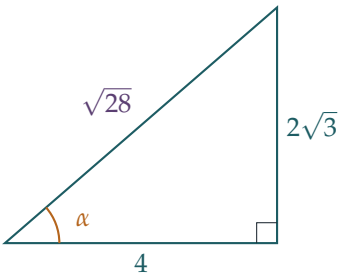
$$4\cos\tfrac{\pi}{3} + 2\sqrt{3}\,\sin\tfrac{\pi}{3} = 4\cdot\tfrac{1}{2} + 2\sqrt{3}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = 2 + 3 = 5,$$

이므로 $\theta = \frac{1}{3}\pi$는 해이고, $\frac{1}{4}\pi < \frac{1}{3}\pi < \frac{1}{2}\pi$이다.

이제 좌변을 $R\cos(\theta - \alpha) = R\cos\theta\cos\alpha + R\sin\theta\sin\alpha$ 꼴로 쓰자. 계수를 비교하면

$$R\cos\alpha = 4, \qquad R\sin\alpha = 2\sqrt{3},$$

이므로 $R^2 = 16 + 12 = 28$, 즉 $R = \sqrt{28}$이고, $\tan\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$이다. $\cos\alpha$와 $\sin\alpha$가 모두 양수이므로 α를 예각으로 잡을 수 있고, 따라서 $\alpha = \arctan(\sqrt{3}/2)$이다.



따라서 방정식은

$$\sqrt{28}\cos(\theta-\alpha)=5, \qquad \text{즉,} \qquad \cos(\theta-\alpha)=\frac{5}{\sqrt{28}},$$

이 되고, $\theta=\frac{1}{3}\pi$는 이 식을 만족한다.

생각해 보기 곧바로 $\frac{1}{3}\pi-\alpha=\arccos(5/\sqrt{28})$라고 결론지을 수 있을까?

꼭 그렇지는 않다. $\cos x=c$의 해는 무수히 많고, $\arccos c$는 그중 $[0,\pi]$에 속하는 하나일 뿐이다. 그러므로 $\frac{1}{3}\pi-\alpha$가 $[0,\pi]$에 속하는지 확인해야 한다. tan는 $(0,\frac{1}{2}\pi)$에서 증가하고 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}<\sqrt{3}=\tan\frac{\pi}{3}$이므로 $0<\alpha<\frac{1}{3}\pi$이다. 따라서

$$0<\tfrac{1}{3}\pi-\alpha<\tfrac{1}{3}\pi\le\pi,$$

이고, 그러므로 $\frac{1}{3}\pi-\alpha=\arccos(5/\sqrt{28})$이다. 이항한 뒤 3을 곱하면

$$\pi=3\arccos(5/\sqrt{28})+3\alpha=3\arccos(5/\sqrt{28})+3\arctan(\sqrt{3}/2),$$

가 되어 원하는 결과를 얻는다.

두 번째 항등식

같은 아이디어를 그대로 따라 하자. 우리가 원하는 것은 $\frac{1}{4}\pi=\arcsin(7\sqrt{2}/10)-\arctan(3/4)$이므로, $\beta=\arctan(3/4)$로 놓고 $\sin(\frac{1}{4}\pi+\beta)$를 살펴본다.

$0<\frac{3}{4}$이므로 β는 예각이고, 세 변의 길이가 3, 4, 5인 직각삼각형으로부터 $\sin\beta=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$이다. 그러면 덧셈정리(addition formula)에 의해

$$\begin{aligned}\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi+\beta\right)&=\sin\tfrac{\pi}{4}\cos\beta+\cos\tfrac{\pi}{4}\sin\beta\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\right)=\frac{7}{5\sqrt{2}}=\frac{7\sqrt{2}}{10}.\end{aligned}$$

생각해 보기 $\frac{1}{4}\pi+\beta$가 정말로 arcsin이 내놓는 각일까?

arcsin의 치역은 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$이므로 $\frac{1}{4}\pi + \beta$가 이 구간에 속해야 한다. $\tan\beta = \frac{3}{4} < 1 = \tan\frac{\pi}{4}$이고 tan는 $(0, \frac{1}{2}\pi)$에서 증가하므로 $0 < \beta < \frac{1}{4}\pi$이고, 따라서

$$\tfrac{1}{4}\pi < \tfrac{1}{4}\pi + \beta < \tfrac{1}{2}\pi.$$

그러므로 $\arcsin(7\sqrt{2}/10) = \frac{1}{4}\pi + \arctan(3/4)$이고, 4를 곱해 이항하면

$$\pi = 4\arcsin(7\sqrt{2}/10) - 4\arctan(3/4),$$

이 되어 원하는 결과를 얻는다.

검산

수치로 계산하면 $\arctan(\sqrt{3}/2) \approx 0.713724$이고 $\arccos(5/\sqrt{28}) \approx 0.333473$이다. 두 값의 합은 $1.047198 \approx \pi/3$이고, 그 세 배는 3.141593이다. 두 번째 항등식의 경우 $\arcsin(7\sqrt{2}/10) \approx 1.428899$이고 $\arctan(3/4) \approx 0.643501$이며, 그 차는 $0.785398 \approx \pi/4$이다. 또한 간단히 살펴보면 $\frac{1}{3}\pi$가 $(\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi)$에서 방정식의 유일한 해임을 알 수 있다. 그 근처의 다른 해 $\alpha - \arccos(5/\sqrt{28}) \approx 0.380$은 $\frac{1}{4}\pi$보다 작기 때문이다.

흔한 실수

- $x \in [0, \pi]$인지 확인하지 않고 $\arccos(\cos x) = x$라고 쓰는 것(또는 $x \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$인지 확인하지 않고 $\arcsin(\sin x) = x$라고 쓰는 것). 엄밀성에 대한 점수가 바로 여기에 걸려 있다.
- $\tan\alpha$를 거꾸로 구하는 것. $R\cos\alpha = 4$, $R\sin\alpha = 2\sqrt{3}$으로부터 얻는 값은 $4/(2\sqrt{3})$이 아니라 $\tan\alpha = 2\sqrt{3}/4$이다.

STEP 너머

π를 역탄젠트들의 조합으로 나타내는 항등식은 $\frac{1}{4}\pi = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$와 같은 마친형 공식(Machin-type formulae)의 바탕이 된다. x가 작을 때 $\arctan x$의 급수(series)가 빠르게 수렴(converge)하기 때문에, 이런 공식들은 π를 아주 많은 자릿수까지 계산하는 데 쓰였다. 이 공식들을 가장 깔끔하게 이해하는 방법은 복소수(complex number)를 통하는 것이다. $\arctan(b/a)$는 $a + bi$의 편각(argument)이므로, 역탄젠트를 더하는 것은 복소수를 곱하는 것에 대응한다. Needham의 *Visual Complex Analysis*(시각적 복소해석학)는 이러한 기하학적 관점을 아름답게 전개한다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.