풀이

STEP II 2003, 문제 11

역학 • 포물체 운동

STEP II 2003, 11번 문제

더 읽어 나가기 전에 문제부터 읽어 보자. 이 문제는 STEP Support Programme의 문제 데이터베이스에 있다:

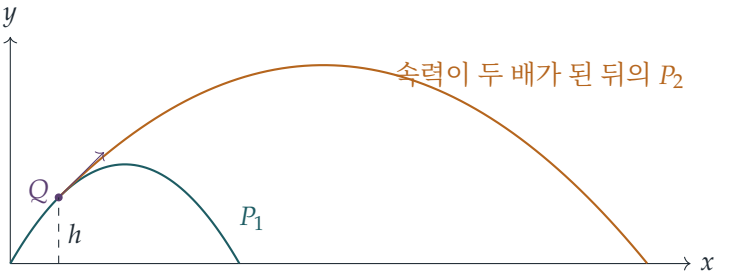
step.maths.org/questions/03-s2-q11

핵심 아이디어

속도(velocity)의 수평 성분(horizontal component)과 수직 성분(vertical component)을 따로 다룬다. 운동 방향이 수평과 45°를 이루는 것은 두 성분이 같을 때이고, 오직 그때뿐이다. 이로부터 첫 번째 시각이 바로 나온다. 속력(speed)이 두 배가 되어도 방향은 바뀌지 않으므로 두 성분이 모두 두 배가 된다. 그 뒤의 비행은 알려진 높이에서 출발하는 새로운 포물체(projectile) 문제가 된다.

풀이

각 입자를 공기 저항(air resistance) 없이 중력만 받아 움직이는 점 포물체로 모형화한다. $s = \sin\alpha$, $c = \cos\alpha$로 쓰자. $\alpha > 45°$이므로 $s > c > 0$이다.



그림은 $\alpha = 60°$인 경우이다. 두 입자는 운동 방향이 처음으로 수평과 45°를 이루는 점 Q까지 청록색 경로를 따라간다. 그 뒤로 P_2는 호박색 경로를 따라간다.

P_1의 비행 시간

시각 t에서의 수직 변위(displacement)는 $y = Vs\,t - \frac{1}{2}gt^2 = t\left(Vs - \frac{1}{2}gt\right)$이다. 이 값은 다음 시각에 다시 영이 된다.

$$T_1 = \frac{2V\sin\alpha}{g}.$$

처음으로 45°가 되는 순간

시각 t에서 속도 성분은 다음과 같다.

$$\dot{x} = Vc, \qquad \dot{y} = Vs - gt.$$

수평 성분은 변하지 않는다. 발사 순간에는 $\dot{y} = Vs > Vc = \dot{x}$이므로 방향이 45°보다 가파르다. $\dot{y}$가 줄어들면서 각은 $\dot{y} = \dot{x}$일 때 처음으로 45°까지 내려가며, 이때 입자는 아직 올라가는 중이다.

$$Vs - gt_1 = Vc \quad\Longrightarrow\quad t_1 = \frac{V(s-c)}{g}.$$

(내려오는 도중 $\dot{y} = -Vc$일 때 방향이 다시 45°를 이루지만, 그것은 더 나중이다.) $\frac{1}{2}T_1 = Vs/g$이므로

$$t_1 = \frac{Vs}{g}\left(1 - \frac{c}{s}\right) = \tfrac{1}{2}(1 - \cot\alpha)\,T_1,$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

P_2의 비행

시각 t_1까지 P_2는 P_1과 똑같이 움직인다. t_1에서 두 속도 성분은 모두 Vc이고, 높이는 다음과 같다.

$$h = Vs\,t_1 - \tfrac{1}{2}gt_1^2 = \frac{V^2}{g}\left[s(s-c) - \tfrac{1}{2}(s-c)^2\right]$$
$$= \frac{V^2}{2g}(s-c)[2s - (s-c)] = \frac{V^2}{2g}\,(s^2 - c^2).$$

$s > c$이므로 이 값은 양수이다.

생각해 보기 "속력이 두 배가 된다"는 것은 속도의 각 성분에 어떤 영향을 주는가?

속력은 바뀌지만 방향은 바뀌지 않으므로 속도 벡터(vector) 전체에 2가 곱해진다. 두 성분 모두 $2Vc$가 된다. 즉 입자는 높이 h에서 수평 위로 45° 방향으로 속력 $2\sqrt{2}\,Vc$로 출발한다.

속력이 두 배가 된 순간부터 P_2가 착지할 때까지 걸린 시간을 τ라 하자. 수직 변위를 Q에서 위쪽으로 재면, 착지한다는 것은 변위가 $-h$라는 뜻이다.

$$2Vc\,\tau - \tfrac{1}{2}g\tau^2 = -\frac{V^2}{2g}(s^2 - c^2).$$

양변에 $-2/g$를 곱하고, 차원이 없는 양 u를 써서 $\tau = (V/g)u$로 놓으면

$$u^2 - 4cu - (s^2 - c^2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = 2c \pm \sqrt{4c^2 + s^2 - c^2} = 2c \pm \sqrt{s^2 + 3c^2}.$$

두 근(root)의 곱이 $-(s^2 - c^2) < 0$이므로 한 근은 음수이다. $\tau > 0$이어야 하므로 더하기 부호를 택한다.

$$\tau = \frac{V}{g}\left(2c + \sqrt{s^2 + 3c^2}\right).$$

따라서

$$T_2 = t_1 + \tau = \frac{V}{g}\left(s - c + 2c + \sqrt{s^2 + 3c^2}\right) = \frac{V}{g}\left(s + c + \sqrt{s^2 + 3c^2}\right).$$

$\frac{1}{2}T_1 = Vs/g$로 나누고 $\sqrt{s^2 + 3c^2}/s = \sqrt{1 + 3c^2/s^2}$($s > 0$이므로 성립한다)를 이용하면

$$\frac{2T_2}{T_1} = \frac{s + c + \sqrt{s^2 + 3c^2}}{s} = 1 + \cot\alpha + \sqrt{1 + 3\cot^2\alpha},$$

이고, 이것이 구하려던 결과이다.

검산

- $\alpha \to 90°$이면 $\cot\alpha \to 0$이고 비는 2로 다가간다. 이는 타당하다. 이 경우 45°가 되는 순간은 비행의 최고점이고 그곳에서 속력은 영이므로, 이를 두 배로 해도 아무 변화가 없어 $T_2 = T_1$이다.
- $\alpha = 45°$(경계의 경우)에서는 발사 순간에 속력이 두 배가 되므로 P_2는 그냥 $2V$로 발사되는 것이고 $T_2 = 2T_1$이다. 공식은 $1 + 1 + 2 = 4$를 주므로 일치한다.
- $\alpha = 60°$에서 $t_1/T_1 = \frac{1}{2}(1 - 1/\sqrt{3}) \approx 0.2113$이고 $2T_2/T_1 = 1 + 1/\sqrt{3} + \sqrt{2} \approx 2.9916$이다. α와 V를 무작위로 2000번 골라 P_2의 비행을 단계별로 수치 시뮬레이션한 결과가 T_2의 공식과 일치했다.

흔한 실수

- 수직 성분만, 또는 수평 성분만 두 배로 하는 것. 방향이 바뀌지 않으므로 두 성분이 모두 두 배가 된다.
- P_2의 운동을 높이 h가 아니라 지면에서 다시 시작하는 것.
- 부호를 확인하지 않고 τ로 음의 근을 택하는 것.

STEP 너머

속도가 순간적으로 바뀌는 것은 **충격량**(impulse), 즉 매우 짧은 시간 동안 작용하는 매우 큰 힘이다. 대학 1학년 역학에서는 충돌, 로켓 분사, 발로 차기를 충격량으로 다룬다. 궤적을 충격량으로 이어진 여러 조각으로 나누는 것은 바로 궤도(orbit) 기동을 계획하는 방식이기도 하다. 짧은 엔진 분사로 우주선을 한 원뿔곡선(conic) 궤도에서 다른 궤도로 옮기는 것이다. Kleppner와 Kolenkow의 *An Introduction to Mechanics*(역학 입문)는 충격량과 운동량(momentum)을 꼼꼼하게 전개하며, 이런 종류의 문제를 많이 담고 있다.

Beyond STEP 풀이: https://beyondstep.keithmcnulty.org/ko/. 풀이 글은 CC0 1.0이다. 문제 자체의 저작권은 © Cambridge University Press & Assessment에 있으며 여기에 싣지 않는다. 영어 원문을 기계 번역하였으며 아직 검토되지 않았다.